

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Oran 1 Ahmed Ben Bella

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques Appliquées

Présentée par

SEGUENI Fouzia

---

**Contrôle optimal de problèmes en  
écologie terrestre**

---

Soutenue le 17 mars 2019, devant le jury composé de :

BOUZAR Chikh	Professeur	Univ. Oran 1	Président
BELGHABA Kacem	Professeur	Univ. Oran 1	Examineur
MOULAY Mohamed-Saïd	Professeur	USTHB	Examineur
TLEMCANI Mounir	Professeur	Univ. USTO MB	Examineur
MORTAD Mohammed-Hichem	Professeur	Univ. Oran 1	Co-directeur
OMRANE Abdennebi	Professeur	Univ. Guyane	Directeur de thèse

*À mes parents,  
mon époux et mes chers enfants.*

# Remerciements

Tout d'abord, je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse Omrane Abdennebi. Je le remercie pour son soutien constant et pour le temps qu'il m'a dédié. Tout au long de ces années, j'ai pu apprécier sa vision des mathématiques, son amabilité, sa générosité à partager ses connaissances.

Je remercie énormément, mon co-directeur Mortad Mohammed Hichem pour les encouragements, les conseils et l'amitié qui a manifesté à mon égard.

J'adresse mes sincères remerciements au professeur Bouzar Chikh d'avoir accepté de précéder mon jury de thèse. C'est un honneur pour moi, et je suis très heureuse. Je remercie également les professeurs Belghaba Kacem, Moulay Mohamed-Saïd et Tlemcani Mounir de me faire l'honneur d'être membres de mon jury.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à mes parents qui m'ont soutenue et m'ont toujours encouragé à faire ce que je souhaitais et à donner le meilleur de moi-même. Je remercie vivement mon époux pour son soutien, sa patience et ses encouragements constants. Enfin je souhaite aussi remercier mes enfants, source de bonheur et ma raison d'être.

## Résumé

Dans la modélisation des phénomènes écologiques et environnementaux, certains paramètres (biologiques, climatiques, etc.) ne sont pas bien connus ou complètement inconnus, ce qui nous mène à étudier des problèmes à données manquantes. Le but recherché dans cette thèse est l'identification des paramètres de pollution de deux problèmes inverses spatiotemporels à données initiales incomplètes, à partir d'une observation sans bruit, et en utilisant la méthode des sentinelles introduite par J.-L. Lions (1992). Le premier problème abordé est un système d'advection-diffusion avec condition au bord de type Robin, modélisant l'absorption de nutriments, par la racine d'une plante dans un sol pollué. Nous démontrons tout d'abord l'existence et l'unicité de la solution pour ce système, ensuite, nous étudions le problème de contrôlabilité exacte à zéro pour la construction et la détermination d'une sentinelle. Aussi, nous caractérisons à l'aide des inégalités de Carleman obtenues, le contrôle optimal. Le second problème étudié est une équation de la chaleur décrivant la diffusion de pollution dans un estuaire. Nous montrons que la question d'existence d'une sentinelle insensible à la condition initiale est équivalente à un problème de contrôlabilité approchée à zéro, nous déterminons également le contrôle optimal pour lequel nous présentons une méthode variationnelle.

**Mots clés** sentinelles, système d'advection-diffusion, équation de la chaleur, existence, unicité, inégalités de Carleman, inégalité d'observabilité, pollution, contrôlabilité à zéro, contrôle optimal.

## Abstract

When modeling of ecological and environmental phenomena, some parameters (biological, climatological, etc.) are not well known or incompletely unknown. This leads to the study of problems with missing data. The main purpose of this thesis is to identify parameters of pollution of two spatiotemporal inverse problems with incomplete initial data from an observation without noise and using the method of sentinels by J.-L. Lions (1992). The first problem studied is a system of advection-diffusion with Robin boundary conditions modeling the absorption of nutrients, by the root of a plant in polluted soil. We first show the existence and the uniqueness of the solution for this system, then we study the null-controllability problem for the construction and determination of a sentinel. Also, we characterize using Carleman's inequalities the optimal control. The second problem addressed is a heat equation describing the diffusion of pollution in an estuary. We show that the question of existence of a sentinel insensitive to the initial condition is equivalent to an approximate null-controllability problem. We also determine the optimal control for which we present a variational method.

**Key words** sentinels, system of advection-diffusion, heat equation, existence, uniqueness, Carleman inequalities, observability inequality, pollution, null-controllability, optimal control.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale et plan de la thèse</b>	<b>11</b>
1.1	Motivation . . . . .	11
1.2	Modèle mathématique de transfert sol-plante . . . . .	14
1.3	Méthode des sentinelles . . . . .	16
1.4	Plan de la thèse . . . . .	17
1.5	Remarque . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Formulation faible du problème</b>	<b>21</b>
2.1	Le problème mathématique . . . . .	22
2.2	Positivité de la solution . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Sentinelles exactes pour les problèmes de transfert sol-plante avec pollution</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	29
3.2	Description du problème . . . . .	30
3.2.1	Observation du système . . . . .	31
3.3	Sentinelles exactes . . . . .	32
3.3.1	Equivalence à un problème de contrôlabilité . . . . .	33
3.3.2	Informations fournies par les sentinelles . . . . .	36
3.4	Existence d'une sentinelle exacte . . . . .	38

3.5	Existence d'un Contrôle optimal . . . . .	40
3.5.1	Construction de la sentinelle . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Inégalité d'observabilité pour le problème d'advection-diffusion</b>	<b>49</b>
4.1	Introduction et principaux résultats . . . . .	49
4.1.1	Fonctions poids et principe . . . . .	50
4.2	Inégalité de Carleman globale . . . . .	52
4.2.1	Etapas de la preuve du théorème 4.4 . . . . .	53
4.3	Contrôle de la chaleur avec condition de Neumann homogène	54
4.3.1	Optimalité et coût du contrôle . . . . .	55
4.3.2	Evaluation de la constante de majoration $M$ . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Sentinelle approchée pour les problèmes de diffusion avec pollution</b>	<b>75</b>
5.1	Formulation faible du problème . . . . .	75
5.1.1	Existence et unicité de la solution . . . . .	76
5.1.2	Positivité de la solution . . . . .	77
5.2	Sentinelle approchée pour les problèmes de diffusion avec pollution . . . . .	79
5.2.1	Description du problème . . . . .	79
5.2.2	Sentinelle approchée . . . . .	81
5.2.3	Equivalence à un problème de contrôlabilité approchée	82
5.2.4	Informations fournies par la sentinelle . . . . .	84
5.3	Existence d'une sentinelle approchée . . . . .	85
5.3.1	Existence du contrôle optimal . . . . .	87
5.3.2	Construction d'une sentinelle approchée . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>93</b>



# Liste des figures

1.1	Conséquences de la pollution du sol . . . . .	12
1.2	Transfert des polluants vers la plante . . . . .	13
1.3	Rhizosphère occupée par une racine. . . . .	15



# Chapitre 1

## Introduction générale et plan de la thèse

### 1.1 Motivation

Le système de vie des individus est régi par une science que l'on appelle communément l'écologie. Le terme d'écologie, proposé en 1866 par Heckel, biologiste allemand, désigne la science qui étudie tous genres de relations existant entre les hommes et les autres êtres vivants (animaux, végétaux,...) et leur environnement (sol, eau,...).

L'importance accordée aux problèmes écologiques, et à leurs conséquences potentielles sur l'humanité a induit un changement dans la perception de l'environnement naturel. Passant d'une attitude destructrice à une attitude protectrice, la sauvegarde de l'environnement est désormais la préoccupation de plusieurs parties prenantes. L'objectif étant de réparer, d'analyser et d'étudier. Le cas échéant, les dysfonctionnements qui atteignent l'écosystème relèvent du domaine des pouvoirs publics et des associations écologiques

en faisant appel à différentes disciplines telles la biologie, la chimie et les mathématiques...

A ce titre, la pollution est considérée comme l'un des grands facteurs de la dégradation de l'environnement, on distingue généralement la pollution des sols.

Cette pollution des sols, qu'elle soit d'origine naturelle ou humaine, industrielle ou agricole, accidentelle ou non, parfois méconnue, peut avoir un impact sur la santé humaine en fonction de la nature des polluants et de leur concentration.

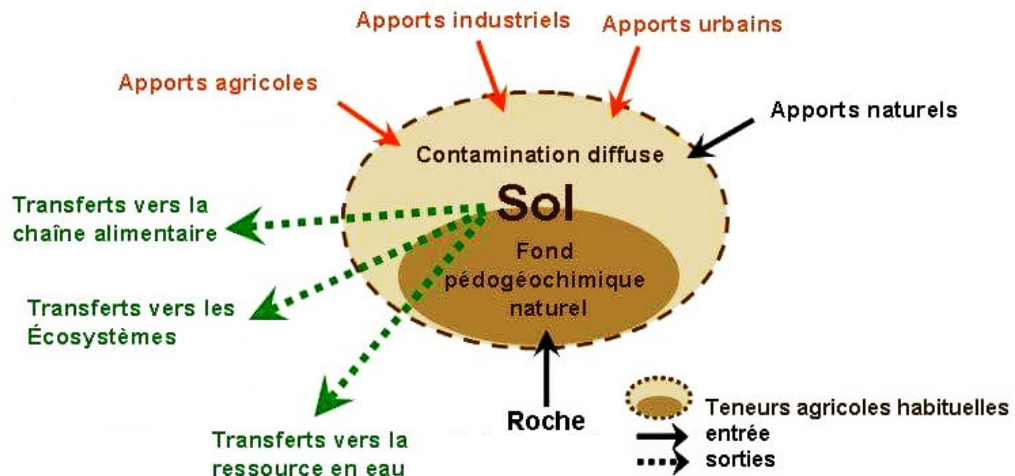


Figure 1.1: Conséquences de la pollution du sol

Les plantes constituent un maillon essentiel de la chaîne alimentaire et une voie d'entrée majeure des polluants vers les animaux et l'homme. De plus, elles sont d'excellents indicateurs de pollution utilisés pour la bio-surveillance, et notamment le traitement des sols pollués "Dépollution des sols".

Pour cette raison, la gestion de la qualité des sols dans le respect des exigences de santé publique, impose de connaître les risques de transfert des polluants vers la plante (voir la figure 1.2).

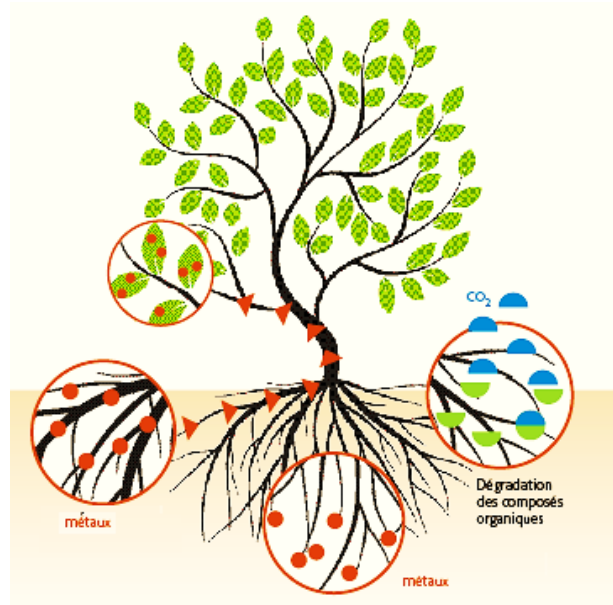


Figure 1.2: Transfert des polluants vers la plante

L'objectif principal de cette thèse est l'identification des termes de pollution pour certains phénomènes écologiques, comme celui de la pollution des sols. Dans ce problème, on ne connaît jamais la donnée initiale (instant du début de la pollution), le polluant se présente comme terme source dont on connaît la position et la nature mais pas la concentration. nous cherchons alors à obtenir des informations sur ce polluant au niveau de l'absorption racinaire en utilisant le modèle de *transfert sol-plante*, afin de minimiser et/ou d'éliminer la pollution.

Notre approche utilise la méthode des sentinelles due à J.-L. Lions [18]

dans les années 1990. Cette méthode a été utilisée dans le domaine écologique par plusieurs auteurs. C'est le cas dans les travaux de Ainseba [1], Bodart et Fabre [5], Kernevez [14], et plus récemment Miloudi [21] [22], Nakoulima [26] et Omrane [31].

## 1.2 Modèle mathématique de transfert sol-plante

Le développement des différents modèles de prélèvement des éléments nutritifs "ions" par les plantes est issu du modèle (Barber [4] et Nye-Marriott [29]). La plupart de ces modèles sont fondés sur deux équations de base, l'une décrivant l'absorption par la racine en fonction de la concentration des nutriments à sa surface, l'autre décrivant la mobilisation et le transport des nutriments du sol vers la racine. Une telle approche a été utilisée par Barber [4] pour simuler le prélèvement d'éléments majeurs comme le phosphore.

Dans ([28], [27]), Tinker et Nye décrivent chimiquement les processus liés à l'absorption des nutriments par les racines. Ils déterminent un modèle utilisant les équations aux dérivées partielles connu sous le nom de système de Nye-Tinker-Barber (NTB).

Ensuite, T. Roose [33] utilise le système de (Nye-Tinker-Barber) exprimé en coordonnées polaires pour effectuer l'étude et l'analyse de ce modèle avec la méthode des développements asymptotiques.

Dans [7], M. Comte et al. ont présenté un modèle de l'absorption du phosphore par les racines, gouverné par une équation de convection-diffusion avec une condition aux limites non linéaire.

Plus récemment, dans [20], Louison et al. ont proposé le système de (Nye-Tinker-Barber) sous forme d'équations d'advection-diffusion pour l'analyse

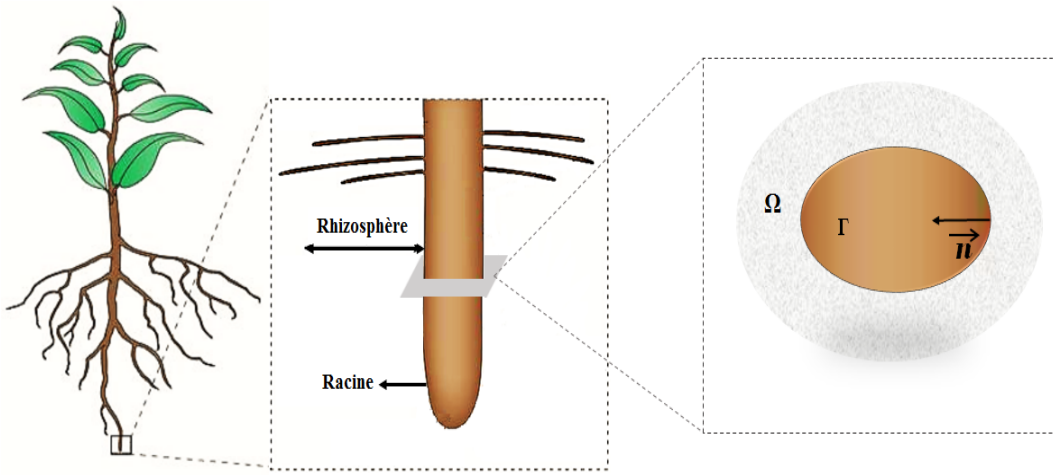


Figure 1.3: Rhizosphère occupée par une racine.

mathématique et l'étude du contrôle optimal.

On parle d'advection car le flux de transport  $q(t, x)$  est de même nature que la concentration de nutriments ( les nutriments se décomposent et sont transportés par  $q$ ).

Le domaine d'étude du modèle que nous allons décrire est composé d'une rhizosphère (partie du sol proche de la racine), représentée par un domaine  $\Omega$  ouvert borné de  $R^d$  ( $d = 1, 2$  ou  $3$ ) que nous supposons occupé par un système racinaire ayant pour surface  $\Gamma$  (voir la figure 1.3).

L'équation décrivant le processus de transport par diffusion radiale et par convection des ions vers la racine est déduite de la deuxième loi de Fick. Elle est fondée sur la conservation de la matière dans le système, elle s'écrit:

$$m \frac{\partial c}{\partial t} + q(t, x) \cdot \nabla c - D \Delta c = 0 \quad \text{dans } Q = ]0, T[ \times \Omega .$$

avec

- $c = c(t, x)$  : Concentration des ions dans la solution du sol  
 $q(t, x)$  : Le flux de Darcy vérifiant la propriété  $\text{div } q = 0$ .  
 $D$  : Coefficient de diffusion de l'élément dans le sol.  
 $m$  : Coefficient de la teneur en humidité et du pouvoir tampon<sup>1</sup> dans le sol.

La condition aux limites est du type Fourier, elle s'écrit :

$$(\nabla c - qc) \cdot \vec{\nu} + h(c) = 0 \quad \text{sur } \Sigma = ]0, T[ \times \Gamma . \quad (1.1)$$

Elle décrit l'absorption des éléments nutritifs à la surface de la racine où le flux des ions en solution est égal à l'influx racinaire. Ce mécanisme suit la cinétique d'absorption de Michaelis-Menten exprimée par la fonction:

$$h(c) = \frac{Ic}{K + c} \quad \text{ou} \quad h(c) = \frac{Ic}{K},$$

$I$  : le flux racinaire maximal des nutriments absorbés

$K$  : la constante de Michaelis-Menten.

Avec une condition initiale:

$$c(0, x) = c_0 \quad \text{sur } \Omega,$$

$c_0$  : Concentration initiale de l'élément dans la solution du sol.

### 1.3 Méthode des sentinelles

La méthode des sentinelles est bien adaptée pour répondre aux questions que nous nous posons. Cette méthode nous permet en effet de déterminer seulement certains termes sans se préoccuper des autres termes manquants qui n'ont pas d'intérêt immédiat dans les problèmes que nous traitons.



La construction et la détermination d'une sentinelle sont équivalentes à la résolution d'un problème de contrôlabilité pour lequel J.-L. Lions utilise la méthode H.U.M (Hilbert Uniqueness Method) [17]. Lions a étudié de nombreux problèmes dans le cas où le contrôle  $v$  et l'observation  $h_0$  ont leur support dans le même ouvert  $\mathcal{O}$  appelé observatoire. Dans ce cas, l'existence d'une sentinelle  $\mathcal{S}$  insensible au terme manquant (en  $\tau$ ) est définie par

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \iint_{]0, T[ \times \mathcal{O}} (h_0 + v)u(\lambda, \tau) dxdt, \quad (1.2)$$

est toujours satisfaite pour  $v = -h_0$  car on obtient directement  $\mathcal{S} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau} = 0$ .

Dans cette thèse, nous présentons la situation où le contrôle et l'observation ayant leurs supports dans des ouverts différents (voir [24],[21]). Dans ce cas, l'existence d'une sentinelle n'est plus triviale. Nous développons également les inégalités de type Carleman ( voir [8], [9], [11], [15], [31] et les nombreuses références dans ces articles). Les inégalités de Carleman sont utilisées en remplacement de la méthode H.U.M<sup>2</sup> de Lions [17] (voir également Zuazua [35]) pour résoudre le problème de contrôlabilité. Nous étudions ici l'existence et la construction de la sentinelle généralisée pour des systèmes distribués à données incomplètes pour le cas sans bruit.

## 1.4 Plan de la thèse

Après avoir présenté la problématique et après en avoir exposé les objectifs souhaités, on présente dans la suite les chapitres de cette thèse :

Tout d'abord, on démontre au chapitre 2 l'existence, l'unicité et la positivité de solution faible pour le problème d'avection-diffusion avec condition

---

<sup>2</sup>La méthode H.U.M reste bien adaptée pour les problèmes hyperboliques comme l'équation des ondes.

au bord de type Robin. Le modèle étudié ici est celui de Ney-Tinker-Barber, décrivant l'absorption de nutriments par la racine d'une plante dans un sol pollué.

Dans le chapitre 3, on montre que l'existence d'une sentinelle exacte pour le modèle de Ney-Tinker-Barber, dans un domaine pollué, se ramène à un problème de contrôlabilité à zéro non trivial. La méthode que nous suivons est celle introduite par J.-L. Lions (1992). De plus, nous caractérisons à l'aide des inégalités de Carleman le contrôle optimal.

En suite, on démontre une inégalité d'observabilité pour le problème d'advection-diffusion, qui résulte des inégalités de Carleman globale adaptées à la forme particulière de la condition aux limites, et qui est essentielle à l'étude des problèmes de contrôlabilité. Ceci est détaillé au chapitre 4.

Dans le chapitre 5, qui a fait l'objet de la publication [34], nous nous intéressons à un système régi par l'équation de la chaleur décrivant la diffusion de pollution dans une rivière ou un estuaire. Nous présentons d'abord des résultats d'existence et d'unicité de solution faible. Ensuite, nous étudions l'existence et la construction d'une sentinelle "approchées". Le problème de construction d'une telle sentinelle est équivalent à un problème de contrôlabilité approchée à zéro, que nous obtenons par la méthode variationnelle.

A la fin de cette thèse, on donne une conclusion sur les résultats obtenus ainsi que quelques perspectives à envisager.

## 1.5 Remarque

En réalité, l'ouvert du modèle de Nye-Tinker-Barber possède au moins deux bords. La condition portée par  $\Sigma_1$  décrit l'absorption des éléments nutritifs à la surface racinaire et la seconde portée par  $\Sigma_2$  signifie qu'il n'y a pas de flux provenant de l'extérieur de la rhizosphère.

Dans notre thèse on s'intéresse à un domaine  $\Omega$  avec un seul bord avec seulement la première condition aux limites donnée par (1.1) pour nous permettre l'utilisation de la méthode des sentinelles.



# Chapitre 2

## Formulation faible du problème

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse mathématique (existence, unicité, positivité de la solution) d'un système d'advection-diffusion linéaire avec condition au bord de type Robin. Nous allons étudier plus précisément l'existence de la solution faible pour le modèle de transfert de nutriments du sol vers les racines d'une plante de type Nye-Tinker-Barber.

En effet, la modélisation des problèmes de transfert sol-plante conduit à des problèmes mathématiques de type advection-diffusion comme le modèle étudié de Nye-Tinker et Barber ([28], [27]). Ils supposent une racine simple cylindrique dans des conditions homogènes (sol et environnement). Le problème est composé, d'une part, d'une équation linéaire de diffusion d'éléments dans le sol, et d'autre part, d'une condition aux limites de type Robin à la surface de la racine en utilisant la loi de prise similaire à celle de Michealis-Menten.

## 2.1 Le problème mathématique

Soit un domaine  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  représentant une partie du sol à étudier, de frontière régulière  $\Gamma$ , elle représente la surface de la racine, nous considérons, durant un intervalle de temps  $]0, T[$ , le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c}{\partial t} + q(t, x) \cdot \nabla c - \Delta c = f \quad \text{dans } Q = ]0, T[ \times \Omega, \\ (\nabla c - qc) \cdot \vec{\nu} + \frac{I}{K} c = 0 \quad \text{sur } \Sigma = ]0, T[ \times \Gamma, \\ c(0, x) = c_0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où  $c = c(t, x)$  représente la concentration des éléments nutritifs et le vecteur  $q = q(t, x)$  appartenant à  $L^\infty(Q)$  représente le flux de Darcy (fluide incompressible) vérifiant la propriété  $\text{div } q = 0$ . La fonction  $h(c) = \frac{Ic}{K}$  est dite fonction de Michaelis-Menten; elle représente l'entrée de flux à la surface de la racine  $\Gamma$ , où  $I$  est le maximum de nutriments pouvant être absorbés, et  $K$  la constante de Michaelis-Menten avec  $\frac{I}{K} \in L^\infty(\Sigma)$ . La fonction  $f \in L^2(Q)$  représente une source de nutriments. Enfin, la condition initiale  $c_0 = c(0, x) \in L^2(\Omega)$  représente une quantité initiale de sels minéraux à l'intérieur de la rhizosphère.

Dans cette section, nous démontrons l'unicité d'une solution faible pour le problème (2.1) en utilisant la formulation variationnelle.

**Remarque 2.1** Notons que l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \forall i = \{1, \dots, n\} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\} \quad (2.2)$$

muni de la norme  $\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$  est un espace de Hilbert. Les fonctions  $H^1$  ne sont pas nécessairement continues mais nous pouvons définir leur trace  $u|_\Gamma$ .

**Définition 2.2** La fonction  $c \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$  est dite formulation faible du problème (2.1), si on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \frac{\partial c}{\partial t}, \rho \rangle + \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \rho dx = \int_{\Omega} q(c \nabla \rho) dx \\ \quad - \int_{\Gamma} \left( \frac{I}{K} c \right) \rho d\gamma + \int_{\Omega} \rho f dx \quad p.p. t \in ]0, T[, \quad \forall \rho \in H^1(\Omega), \\ c(x, 0) = c_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Nous cherchons maintenant à montrer l'existence et l'unicité de la solution pour (2.3). L'outil essentiel qui servira à prouver un résultat d'existence et d'unicité de solution unique pour ce problème est le théorème de Lions pour les problèmes d'évolution que l'on trouve dans (Brézis[6], p.218, th X.9), voir aussi G. Allaire [2]. Ce théorème joue un rôle comparable au théorème de Lax-Milgram, pour les problèmes paraboliques et dont voici le rappel :

**Théorème 2.3 (Lions)** Soit  $H$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  et de la norme  $|\cdot|$ . Soit  $V$  un autre espace de Hilbert de norme  $\|\cdot\|$ . On suppose que  $V \subset H$  avec injection continue et dense, de sorte que

$$V \subset H \subset V'.$$

Soit  $T > 0$  fixé. Soit la forme bilinéaire  $a(t; u, v) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) la fonction  $t \longrightarrow a(t; u, v)$  est mesurable  $\forall u, v \in V$ ,
- (ii)  $|a(t; u, v)| \leq M \|u\| \|v\|$  p.p.  $t \in [0, T]$ ,  $\forall u, v \in V$ ,
- (iii)  $|a(t; v, v)| \geq \alpha \|v\|_V^2 - C \|v\|_H^2$  p.p.  $t \in [0, T]$ ,  $\forall v \in V$ ,

où  $\alpha > 0$ ,  $M$  et  $C$  sont des constantes.

Étant donné  $f \in L^2(0, T; V')$  et  $u_0 \in H$ , il existe une unique fonction  $u$  telle

que

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H) \text{ et } \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V')$$

et  $u$ , solution du problème d'évolution :

$$\begin{cases} \langle \frac{du}{dt}(t), v \rangle + a(t; u(t), v) = \langle f(t), v \rangle & p.p. \quad t \in [0, T], \quad \forall v \in V \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Nous pouvons alors démontrer le théorème suivant :

**Théorème 2.4** Soient  $f \in L^2(Q)$  et  $q \in L^\infty(Q)^N$ . Alors la formulation faible (2.3) admet une unique solution faible  $c := c(t, x)$  telle que

$$c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

**Preuve** - Notons que

$$B(t; c, \rho) = \int_{\Gamma} \frac{I}{K} c \rho \, d\gamma - \int_{\Omega} q (c \nabla \rho) \, dx + \int_{\Omega} \nabla \rho \cdot \nabla c \, dx \quad (2.5)$$

est une forme bilinéaire sur l'espace  $H^1(\Omega)$ , la continuité de  $B$  résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet,

$$|B(t; c, \rho)| \leq \left\| \frac{I}{K} \right\|_{\infty} \|c\|_{L^2(\Gamma)} \|\rho\|_{L^2(\Gamma)} + (1 + \|q\|_{\infty}) \|c\|_{H^1(\Omega)} \|\rho\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.6)$$

Or par le théorème de trace, et plus particulièrement grâce à la continuité de l'opérateur trace, nous avons:

$$\|c\|_{L^2(\Gamma)} \leq \alpha_{\Omega} \|c\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|\rho\|_{L^2(\Gamma)} \leq \alpha'_{\Omega} \|\rho\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.7)$$

ce qui entraîne que

$$B(t; c, \rho) \leq M \|c\|_{H^1(\Omega)} \|\rho\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.8)$$



avec  $M = 1 + \|q\|_\infty + \alpha_\Omega \alpha'_\Omega \|\frac{I}{K}\|_\infty$ .

Ainsi,  $B$  est bilinéaire continue sur  $H^1(\Omega)$ .

Reste à étudier la semi-coercivité de  $B$ , nous avons

$$\begin{aligned} B(t; c, c) &= \int_\Gamma \frac{I}{K} |c|^2 d\gamma - \int_\Omega q (c \nabla c) dx + \int_\Omega |\nabla c|^2 dx \\ &\geq \|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_\Omega q (c \nabla c) dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . En appliquant l'inégalité de Young,  $ab \leq \frac{1}{2} \left( \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2 \right)$  au dernier terme de la relation (2.9), il vient

$$- \int_\Omega q (c \nabla c) dx \geq -\|q\|_\infty \left( \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|c\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Nous combinons ce résultat avec

$$\|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|c\|_{H^1(\Omega)}^2 - \|c\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.10)$$

Nous obtenons alors

$$B(t; c, c) \geq \delta \|c\|_{H^1(\Omega)}^2 + (\delta + \frac{1}{2}\varepsilon^{-1}\|q\|_\infty) \|c\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

avec  $\delta = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon\|q\|_\infty$  et  $\varepsilon$  assez petit.

D'autre part, l'application  $l$  donnée par

$$l(t; \rho) = \int_\Omega \rho f dx.$$

est linéaire continue dans  $H^1(\Omega)$ . En effet,

$$|l(t; \rho)| = \left| \int_\Omega \rho f dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\rho\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\rho\|_{H^1(\Omega)}.$$

Les hypothèses du théorème de Lions sont réunies, il existe donc une solution unique  $c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  pour le problème (2.1). ■

## 2.2 Positivité de la solution

Dans cette section, nous montrons que la solution  $c = c(t, x)$  du problème (2.1) est bien positive. Effectivement, l'état  $c$  représente la concentration des nutriments absorbés par les racines des plantes (une quantité positive), donc, il serait raisonnable de vérifier que  $c \geq 0$ .

**Proposition 2.5** *Nous supposons que  $c_0 \geq 0$ , et que  $c|_{\Gamma} \geq 0$  et  $f \geq 0$  sur  $[0, T[$ . Alors :*

$$c(t, x) \geq 0, \quad \text{pour presque tout } t \geq 0.$$

**Preuve** - Nous utilisons les notations standard :

$$c^-(t, x) = \begin{cases} -c & \text{si } c < 0, \\ 0 & \text{si } c \geq 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad c^+(t, x) = \begin{cases} c & \text{si } c > 0, \\ 0 & \text{si } c \leq 0. \end{cases}$$

avec donc  $c = c^+ - c^-$ . Le but est de montrer que  $c^-$  est nul.

Comme  $c$  est solution faible du problème (2.3) pour presque tout  $t$ , alors elle vérifie pour tout  $\rho \in H^1(\Omega)$  l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial t} \rho \, dx + \int_{\Gamma} \left(\frac{I}{K}c\right) \rho \, d\gamma - \int_{\Omega} q (c \nabla \rho) \, dx + \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \rho \, dx = \int_{\Omega} \rho f \, dx.$$

En prenant  $\rho = c^-(t, \cdot)$  pour tout  $t > 0$ , nous obtenons

$$\int_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial t} c^- \, dx + \int_{\Gamma} \left(\frac{I}{K}c\right) c^- \, d\gamma - \int_{\Omega} q (c \nabla c^-) \, dx + \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla c^- \, dx = \int_{\Omega} c^- f \, dx.$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |c^-|^2 \, dx - \int_{\Gamma} \frac{I}{K} |c^-|^2 \, d\gamma \\ & + \int_{\Omega} q (c^- \nabla c^-) \, dx - \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 \, dx = \int_{\Omega} c^- f \, dx. \end{aligned}$$

car

$$c^+ c^- = \left| \frac{\partial c^+}{\partial t} \right| c^- = (\nabla c^+) c^- = 0.$$

De même, et par ce qui précède nous avons :

$$\int_{\Omega} q (c^- \nabla c^-) dx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} q |c^-|^2 d\gamma = 0.$$

Nous en déduisons que :

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |c^-|^2 dx = \int_{\Omega} c^- f dx + \int_{\Gamma} \frac{I}{K} |c^-|^2 d\gamma + \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 dx \geq 0.$$

En intégrant sur  $[0, t[$ , nous obtenons

$$\int_{\Omega} |c^-(t, x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |c^-(0, x)|^2 dx = 0$$

car  $c_0 \geq 0$ . Ainsi  $c^-(t, x) = 0$  pour presque tout  $t \in [0, T[$ .

■



# Chapitre 3

## Sentinelle exacte pour les problèmes de transfert sol-plante avec pollution

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'identification des termes de pollution qui se trouvent dans les problèmes liés à l'écologie terrestre. C'est le cas par exemple de la pollution des sols par les éléments métalliques. Nous distinguons principalement le cadmium (Cd), considéré comme un des polluants minéraux les plus préoccupants pour la santé et l'environnement pour sa toxicité et mobilité. Il est absorbé par les racines des plantes et accède plus facilement aux parties aériennes (tiges, feuilles, fruits). Pour cette raison, son transfert aux plantes doit être étroitement surveillé pour prévoir et réduire les flux de cette pollution vers les parties destinées à l'alimentation.

Nous utilisons ici le modèle de Nye-Tinker-Barber que nous allons rap-

peler ci-après. Dans ces modèles d'évolution, il n'est pas facile de connaître avec précision la donnée initiale (donnée inconnue partiellement ou totalement). Avec le terme de pollution, nous nous retrouvons avec deux termes manquants. Dans le but d'étudier une telle situation, la méthode des sentinelles de Lions [18] est bien adaptée pour nous fournir des informations sur le terme de pollution au niveau de l'absorption sans tenir compte des données initiales que l'on connaît mal. Cette étude nous mène à des problèmes de contrôlabilité où la principale difficulté provient de la forme particulière de la condition aux limites.

Nous allons montrer que l'existence d'une telle sentinelle est équivalente à un problème de contrôlabilité à zéro non trivial.

**Remarque 3.1** *Les données manquantes peuvent provenir du bord également et pas seulement des données initiales. Nous étudions ici seulement le cas des données initiales incomplètes, par soucis de simplicité de l'exposé.*

## 3.2 Description du problème

Soit le domaine  $\Omega$  de  $R^d$  ( $d = 1, 2$  ou  $3$ ) borné, représentant une partie du sol à étudier, de frontière régulière  $\Gamma$  qui désigne la surface de la racine. Nous considérons, durant un intervalle de temps  $]0, T[$ , le modèle suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial c}{\partial t} + q \cdot \nabla c - \Delta c & = \xi + \lambda \widehat{\xi} \quad \text{dans } Q = ]0, T[ \times \Omega, \\ (\nabla c - qc) \cdot \vec{\nu} + \frac{I}{K} c & = 0 \quad \text{sur } \Sigma = ]0, T[ \times \Gamma, \\ c(0, x) & = c_0 + \tau \widehat{c}_0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où  $c = c(t, x, \lambda, \tau)$  désigne la concentration des nutriments au temps  $t$  à la position  $x$ , le vecteur  $q = q(t, x)$  représente le flux de Darcy vérifiant  $\text{div } q = 0$ . La fonction  $h(c) = \frac{Ic}{K}$  est l'expression linéaire dite fonction de

Michaelis-Menten; elle représente l'entrée de flux à la surface de la racine  $\Gamma$ , où  $I$  est le maximum de nutriments pouvant être absorbés et  $K$  la constante de Michaelis-Menten. Ici,  $\lambda$  et  $\tau$  sont des réels assez petits mais qui ne sont pas connus, et  $\widehat{\xi}$  et  $\widehat{c}_0$  sont des fonctions de normes minimales dans le sens suivant :

$$\left\| \widehat{\xi} \right\|_{L^2(Q)} \leq 1 \quad \text{et} \quad \left\| \widehat{c}_0 \right\|_{L^2(\Omega)} \leq 1.$$

Le problème qui se pose est le suivant: *comment obtenir des informations sur  $\lambda \widehat{\xi}$  qui ne soient pas affectées par les variations de la donnée initiale  $c(0, x)$  autour de  $c_0$ ?*

Bien sûr, pour espérer pouvoir obtenir des informations, il faut observer l'état du système (3.1).

### 3.2.1 Observation du système

Nous disposons d'une mesure connue  $c_{obs}$  l'unique solution du système (3.1) observée sur une partie du sol  $\mathcal{O}$  (l'ensemble  $\mathcal{O} \subset \Omega$  dit observatoire), pendant un temps  $t \in ]0, T[$ .

Le problème se précise maintenant: *peut-on obtenir, à partir de la donnée  $c_{obs}$ , des informations sur  $\lambda \widehat{\xi}$  qui soient indépendantes du terme manquant  $\tau \widehat{c}_0$ .*

Pour répondre à cette question, nous utilisons la méthode des sentinelles exactes.

### 3.3 Sentinelles exactes

Nous montrons dans cette partie que l'on peut établir la structure des sentinelles exactes pour une observation sans bruit.

Pour cela, soit  $h_0$  une fonction définie sur  $L^2(]0, T[ \times \mathcal{O})$  tel que  $h_0 \geq 0$  et tel que  $\omega \subset \mathcal{O} \subset \Omega$  (l'ouvert de contrôle).

On pose

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \iint_Q (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + v \chi_{\omega}) c(\lambda, \tau) \, dx dt, \quad (3.2)$$

où

$$v \in L^2(]0, T[ \times \omega),$$

l'état

$$c(\lambda, \tau) := c(t, x; \lambda, \tau) \quad (3.3)$$

correspondant à une pollution  $\lambda \widehat{\xi}$  et à un terme manquant  $\tau \widehat{c}_0$ .

**Définition 3.2** *Nous dirons que la fonctionnelle  $\mathcal{S}$  est une sentinelle exacte si les conditions suivantes sont satisfaites:*

$$\forall \widehat{c}_0 \in L^2(\Omega) \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) = 0, \quad (3.4)$$

et

$$\|v\|_{L^2(]0, T[ \times \omega)} \text{ est le minimum dans } L^2(]0, T[ \times \omega). \quad (3.5)$$

**Remarque 3.3** *Si  $\omega = \mathcal{O}$ , nous retrouvons la notion de sentinelle de Lions [18]. Ce cas n'est pas réaliste dans le sens où l'ouvert de contrôle est souvent très petit pour des raisons de coût.*

*Si la condition (3.4) est satisfaite, nous dirons que la sentinelle est insensible par rapport aux termes manquants.*

*La condition d'énergie minimale sur  $L^2$ , donnée par (3.5), exprime le fait que l'on s'éloigne le moins possible de la moyenne.*



### 3.3.1 Equivalence à un problème de contrôlabilité

Dans cette partie, nous montrons que l'existence d'une fonction contrôle  $v$  et donc d'une sentinelle  $\mathcal{S}$  est équivalente à un problème de contrôlabilité exacte à zéro. Tout d'abord, il est facile de vérifier que la condition (3.4) s'écrit:

$$\iint_Q c_\tau (v\chi_\omega + h_0\chi_\mathcal{O}) \, dxdt = 0, \quad (3.6)$$

avec  $c_\tau = \frac{\partial c}{\partial \tau}(0, 0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \frac{c(0, \tau) - c(0, 0)}{\tau} \right)$  solution du système:

$$\begin{cases} \frac{\partial c_\tau}{\partial t} + q \cdot \nabla c_\tau - \Delta c_\tau & = 0 & \text{dans } Q, \\ (\nabla c_\tau - qc_\tau) \cdot \vec{\nu} + \frac{I}{K} c_\tau & = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ c_\tau(0, x) & = \hat{c}_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.7)$$

En effet, la fonction  $c(0, \tau)$  est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial c(0, \tau)}{\partial t} + q \cdot \nabla c(0, \tau) - \Delta c(0, \tau) & = \xi & \text{dans } Q, \\ (\nabla c(0, \tau) - qc(0, \tau)) \cdot \vec{n} + \frac{I}{K} c(0, \tau) & = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ c(0, \tau)(0) & = c_0 + \tau \hat{c}_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.8)$$

et  $c(0, 0)$  (Cf. notation (3.3)) est solution du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial c(0, 0)}{\partial t} + q \cdot \nabla c(0, 0) - \Delta c(0, 0) & = \xi & \text{dans } Q = ]0, T[ \times \Omega, \\ (\nabla c(0, 0) - qc(0, 0)) \cdot \vec{n} + \frac{I}{K} c(0, 0) & = 0 & \text{sur } \Sigma = ]0, T[ \times \Gamma, \\ c(0, 0)(0) & = c_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.9)$$

En retranchant (3.9) de (3.8), puis en multipliant par  $\frac{1}{\tau}$  on trouve bien (3.7) par passage à la limite quand  $\tau \rightarrow 0$ .

**Remarque 3.4** *L'énoncé (3.4) suppose l'existence de la dérivée  $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0)$ , donc de la dérivée  $\frac{\partial c}{\partial \tau}$  pour  $\lambda = \tau = 0$ .*

Précisons maintenant notre résultat d'équivalence à partir de la proposition suivante

**Proposition 3.5** *Soit  $y = y(t, x; v)$  l'état adjoint solution du problème :*

$$\begin{cases} -\frac{\partial y}{\partial t} - q \cdot \nabla y - \Delta y = v\chi_\omega + h_0\chi_\mathcal{O} & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + \frac{I}{K}y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(T, x) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.10)$$

Alors, il existe une sentinelle au problème (3.1), si et seulement si, il existe une fonction de contrôle  $v$  de norme minimale telle que pour toute solution  $y$  de (3.10), on ait :

$$y(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.11)$$

**Preuve** - Nous multiplions la première équation du système (3.10) par  $c_\tau$  solution de (3.7) et nous intégrons par parties sur  $Q = ]0, T[ \times \Omega$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \iint_Q c_\tau \left( -\frac{\partial y}{\partial t} - q \cdot \nabla y - \Delta y \right) dxdt &= \iint_Q y \left( \frac{\partial c_\tau}{\partial t} - \Delta c_\tau \right) dxdt \\ &\quad - \int_\Omega y(T) c_\tau(T) dx + \int_\Omega y(0) c_\tau(0) dx \\ &\quad - \iint_\Sigma \left( c_\tau \frac{\partial y}{\partial \nu} - y \frac{\partial c_\tau}{\partial \nu} \right) d\gamma dt \\ &\quad - \iint_Q c_\tau (q \cdot \nabla y) dxdt \\ &= \iint_Q y \left( \frac{\partial c_\tau}{\partial t} - \Delta c_\tau \right) dxdt + \int_\Omega y(0) \widehat{c}_0 dx \\ &\quad - \iint_\Sigma \left( c_\tau \frac{\partial y}{\partial \nu} - y \frac{\partial c_\tau}{\partial \nu} \right) d\gamma dt \\ &\quad - \iint_Q c_\tau (q \cdot \nabla y) dxdt \end{aligned} \quad (3.12)$$

En utilisant les relations suivantes

$$\begin{cases} \operatorname{div}(qy) = q \cdot \nabla y + y \operatorname{div} q, \\ \operatorname{div}(qy c_\tau) = \operatorname{div}(qy) c_\tau + (qy) \nabla c_\tau, \end{cases}$$

Nous montrons que,

$$\iint_Q c_\tau (q \cdot \nabla y) \, dxdt = \iint_Q \operatorname{div}(c_\tau y q) \, dxdt - \iint_Q q (y \nabla c_\tau) \, dxdt, \quad (3.13)$$

et par application du théorème de Gauss, nous trouvons

$$- \iint_Q c_\tau (q \cdot \nabla y) \, dxdt = - \iint_\Sigma (q y c_\tau) \cdot \vec{\nu} \, d\gamma dt + \iint_Q q (y \nabla c_\tau) \, dxdt. \quad (3.14)$$

Utilisant maintenant (3.14) dans (3.12), nous obtenons:

$$\begin{aligned} \iint_Q c_\tau \left( -\frac{\partial y}{\partial t} - q \cdot \nabla y - \Delta y \right) \, dxdt &= \iint_Q y \left( \frac{\partial c_\tau}{\partial t} + q \cdot \nabla c_\tau - \Delta c_\tau \right) \, dxdt \\ &+ \int_\Omega y(0) \widehat{c}_0 \, dx - \iint_\Sigma (c_\tau \frac{\partial y}{\partial \nu} - y \frac{\partial c_\tau}{\partial \nu}) \, d\gamma dt \\ &- \iint_\Sigma (q c_\tau y) \cdot \vec{\nu} \, d\gamma dt \end{aligned}$$

Comme  $c_\tau$  et  $y$  sont solutions respectivement de (3.7) et (3.10), alors

$$\begin{aligned} &- \iint_\Sigma (c_\tau \frac{\partial y}{\partial \nu} - y \frac{\partial c_\tau}{\partial \nu}) \, d\gamma dt - \iint_\Sigma (q c_\tau y) \cdot \vec{\nu} \, d\gamma dt \\ &= \iint_\Sigma \frac{I}{K} (y c_\tau) \cdot \vec{\nu} \, d\gamma dt - \iint_\Sigma \frac{I}{K} (y c_\tau) \cdot \vec{\nu} \, d\gamma dt = 0. \end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned} \iint_Q c_\tau \left( -\frac{\partial y}{\partial t} - q \cdot \nabla y - \Delta y \right) \, dxdt &= \iint_Q c_\tau (h_o \chi_O + v \chi_\omega) \, dxdt \\ &= \int_\Omega y(0, x) \widehat{c}_0 \, dx. \end{aligned}$$

Par suite, si la sentinelle existe (i.e (3.6) vérifiée), alors la dernière égalité donne:

$$\int_\Omega y(0, x) \widehat{c}_0 \, dx = 0 \quad \forall \widehat{c}_0 \in L^2(\Omega).$$

Finalement,

$$y(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Réciproquement, la fonction  $h_0$  étant donnée, soit  $y := y(t, x; v)$  la solution du problème de contrôlabilité (3.10) et il existe une fonction de contrôle  $v$  de norme minimale, telle que l'on ait la condition

$$y(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.15)$$

Alors, en multipliant la première équation de (3.10) par  $c_\tau = \frac{\partial c}{\partial \tau}(0, 0)$  solution du problème (3.7) et en intégrant par parties. Et enfin en utilisant les conditions initiales et aux limites de part et d'autre, il vient :

$$0 = \int_{\Omega} y(0, x) \widehat{c}_0 dx = \int_Q (v\chi_\omega + h_0\chi_{\mathcal{O}}) c_\tau dxdt, \quad (3.16)$$

grâce à (3.15) (c'est à dire (3.11)). Ceci montre l'existence d'une sentinelle (condition (3.4)) d'après la définition même d'une sentinelle.  $\blacksquare$

### 3.3.2 Informations fournies par les sentinelles

Si  $c_{obs}$  est l'état du système (3.1) mesuré sur un observatoire  $\mathcal{O}$ , alors la sentinelle mesurée est

$$\mathcal{S}_{obs}(\lambda, \tau) = \iint_Q (v\chi_\omega + h_0\chi_{\mathcal{O}}) c_{obs}(\lambda, \tau) dxdt. \quad (3.17)$$

La détermination du contrôle  $v$  nous permet d'identifier le paramètre de pollution  $\lambda\widehat{\xi}$ . Pour ce faire, on effectue un développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de  $(0, 0)$ , on obtient une égalité approximative suivante

$$\mathcal{S}_{obs}(\lambda, \tau) \simeq \mathcal{S}(0, 0) + \lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0) + \tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0).$$

Et puisque  $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) = 0$ , alors

$$\mathcal{S}_{obs}(\lambda, \tau) - \mathcal{S}(0, 0) = \lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0).$$

Ce qui est encore équivalent à

$$\iint_Q (v\chi_\omega + h_0\chi_O) (c_{obs} - c(0,0)) dxdt \simeq \lambda \iint_Q (v\chi_\omega + h_0\chi_O) c_\lambda dxdt, \quad (3.18)$$

où  $c(0,0)$  est l'état calculé pour  $\lambda = \tau = 0$  et  $c_\lambda = \frac{\partial c}{\partial \lambda}(0,0)$  est solution du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial c_\lambda}{\partial t} + q \cdot \nabla c_\lambda - \Delta c_\lambda & \simeq \widehat{\xi} \text{ dans } Q, \\ (\nabla c_\lambda - qc_\lambda) \cdot \vec{\nu} + \frac{I}{K} c_\lambda & = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ c_\lambda(0, x) & = 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.19)$$

D'autre part, en multipliant la première équation du système (3.19) par  $y$  et en intégrant par partie sur  $]0, T[ \times \Omega$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \iint_Q y \left( \frac{\partial c_\lambda}{\partial t} + q \cdot \nabla c_\lambda - \Delta c_\lambda \right) dxdt &= \iint_Q c_\lambda \left( -\frac{\partial y}{\partial t} - q \cdot \nabla y - \Delta y \right) dxdt \\ &+ \int_\Omega y(T) c_\lambda(T) dx - \int_\Omega y(0) c_\lambda(0) dx \\ &+ \iint_\Sigma \left( c_\lambda \frac{\partial y}{\partial \nu} - y \frac{\partial c_\lambda}{\partial \nu} \right) d\gamma dt \\ &+ \iint_\Sigma (qc_\lambda y) \cdot \vec{\nu} d\gamma dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Comme  $c_\lambda$  et  $y$  sont solutions respectivement de (3.19) et (3.10), alors (3.20) devient

$$\iint_Q \widehat{\xi} y dxdt \simeq \iint_Q (v\chi_\omega + h_0\chi_O) c_\lambda dxdt. \quad (3.21)$$

Donc, de (3.18) et (3.21), il vient

$$\lambda \iint_Q y \widehat{\xi} dxdt \simeq \iint_Q (v\chi_\omega + h_0\chi_O) (c_{obs} - c(0,0)) dxdt. \quad (3.22)$$

A partir de l'estimation (3.22), nous pouvons identifier le terme de pollution  $\lambda \widehat{\xi}$ . Plus précisément, obtenir des informations sur le polluant absorbé par les racines des plantes.

### 3.4 Existence d'une sentinelle exacte

De ce qui précède, nous avons prouvé que l'existence de la sentinelle exacte est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro pour le système (3.10)-(3.11), c'est-à-dire la proposition 3.5.

L'outil principal pour obtenir ce résultat de contrôlabilité, est une inégalité d'observabilité pour le système adjoint basée sur des estimations de type Carleman, qui nous sera fournie par le proposition suivante

**Proposition 3.6** *Il existe une constante positive  $C = C(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T)$  telle que pour tout  $h_o \in L^2(]0, T[ \times \mathcal{O})$  satisfaisant  $\|\mu h_o \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)} < +\infty$  avec  $\mu$  une fonction positive dans  $C^2(Q)$  telle que  $\frac{1}{\mu}$  soit bornée. Alors la solution du système adjoint pour le problème (3.10) donné par*

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + q \cdot \nabla \varphi - \Delta \varphi & = 0 & \text{dans } Q, \\ (\nabla \varphi - q(t, x) \varphi) \cdot \vec{\nu} & = -\frac{I}{K} \varphi & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi(0, x) & = \varphi^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.23)$$

vérifie l'inégalité suivante:

$$\iint_{]0, T[ \times \Omega} \frac{1}{\mu^2} |\varphi|^2 dx dt \leq C \iint_{]0, T[ \times \omega} \frac{1}{\mu^2} |\varphi|^2 dx dt \quad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega) \quad (3.24)$$

La preuve de cette proposition fera l'objet du chapitre suivant.

**Remarque 3.7** *Nous pouvons déduire à partir de l'inégalité (3.24), les propriétés suivantes*

- *Nous avons l'inégalité :*

$$\iint_{] \frac{T}{4}, \frac{3T}{4} [ \times \Omega} |\varphi|^2 dx dt \leq M \iint_{]0, T[ \times \omega} |\varphi|^2 dx dt, \quad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega) \quad (3.25)$$

où  $M$  est une constante positive.

- *La propriété de la continuation unique: On a en effet si  $\varphi = 0$  dans  $]0, T[ \times \omega$  et  $\varphi$  solution de (3.23) alors  $\varphi = 0$  dans  $]0, T[ \times \Omega$ .*

Nous allons maintenant, afin de prouver la contrôlabilité exacte à zéro, définir l'ensemble des états atteignables

$$\tilde{\mathcal{R}}(0) = \{y(0, x) \text{ tel que } y(t, x; v) \text{ sol. de (3.10), } v \in L^2(]0, T[ \times \omega)\},$$

et montrer que  $\tilde{\mathcal{R}}(0)$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ . Plus précisément, nous montrons la proposition suivante

**Proposition 3.8** *Soit  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$  tel que:*

$$\langle y(0), \varphi^0 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0. \quad \forall v \in L^2(]0, T[ \times \omega)$$

*Alors, nous avons  $\varphi^0 \in \{0\}$ .*

**Preuve** - L'ensemble  $\tilde{\mathcal{R}}(0)$  est un sous espace vectoriel de  $L^2(\Omega)$ , il sera dense dans  $L^2(\Omega)$  si et seulement si son orthogonal dans  $L^2(\Omega)$  est réduit à zéro.

Comme  $\{0\} \subset \tilde{\mathcal{R}}^\perp(0)$ , il reste à montrer que  $\tilde{\mathcal{R}}(0)^\perp \subset \{0\}$ .

Soit donc  $\varphi^o \in \tilde{\mathcal{R}}(0)^\perp$  et  $\varphi \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$  solution du problème (3.23) associée.

Multiplions la première équation du système (3.10) par  $\varphi$ . Après intégrations par parties il vient

$$\begin{aligned} \iint_Q \varphi \left(-\frac{\partial y}{\partial t} - q \cdot \nabla y - \Delta y\right) dx dt &= \iint_Q y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + q \cdot \nabla \varphi - \Delta \varphi\right) dx dt \\ &+ \int_\Omega \varphi(T) y(T) dx - \int_\Omega \varphi(0) y(0) dx \\ &+ \iint_\Sigma \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial y}{\partial \nu}\right) d\gamma dt \\ &+ - \iint_\Sigma (qy\varphi) \cdot \vec{\nu} d\gamma dt. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Comme  $y$  et  $\varphi$  sont solutions respectivement de (3.10) et (3.23), alors (3.26) devient

$$\iint_Q \varphi (v\chi_\omega + h_0\chi_O) \, dxdt = \int_\Omega y(0)\varphi(0)dx = 0, \quad \forall v \in L^2(]0, T[ \times \omega)$$

et comme  $v\chi_\omega + h_0\chi_O \neq 0$  pour tout  $v \in L^2(]0, T[ \times \omega)$ , donc  $\varphi \equiv 0$  dans  $]0, T[ \times \omega \subset Q$ . D'après la propriété de continuation unique pour le système (3.23), on en déduit que  $\varphi = 0$  dans  $Q$ .

Par conséquent,  $\varphi^0 = 0$  ce qui montre que  $\tilde{R}(0)^\perp = \{0\}$ . ■

**Remarque 3.9** *La proposition (3.8), montre bien l'existence d'un contrôle  $v \in L^2(]0, T[ \times \omega)$  tel que la solution  $y$  du problème (3.10) satisfait*

$$\|y(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

*Le passage à la limite pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , nous garantit la contrôlabilité exacte à zéro du problème (3.10)-(3.11).*

### 3.5 Existence d'un Contrôle optimal

Nous rappelons que l'existence d'une sentinelle indépendante des termes manquants (Cf. Proposition 3.5) est assurée par l'existence des solutions pour le problème d'optimisation sous contrainte suivant:

$$(\mathcal{P}^*) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } \frac{1}{2} \iint_{]0, T[ \times \omega} |v|^2 \, dxdt \\ v \in L^2(]0, T[ \times \omega), \text{ et} \\ \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial y}{\partial t} - q(t, x) \cdot \nabla y - \Delta y = v\chi_\omega + h_0\chi_O & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + \frac{I}{K}y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(T, x) = y(0, x) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.27)$$



**Remarque 3.10** *D'après la proposition 3.8, on sait qu'il existe  $v \in L^2(]0, T[ \times \omega)$  tel que la solution de (3.10) vérifie  $y(0) = 0$  dans  $\Omega$ . Alors, il est nécessaire de sélectionner un contrôle de norme minimale afin d'assurer l'existence d'une sentinelle.*

La proposition suivante montre l'existence du contrôle optimal pour  $(\mathcal{P}^*)$  ce qui signifie encore l'existence de la sentinelle pour une observation sans bruit.

**Proposition 3.11** *(Existence et unicité) Le problème  $(\mathcal{P}^*)$  admet une unique solution  $(\widehat{v}, \widehat{y})$ .*

**Preuve** - l'application :  $v \mapsto \frac{1}{2} \iint_{]0, T[ \times \omega} |v|^2 dxdt$  est continue, coercive et strictement convexe. D'autre part, l'ensemble des contraintes est non vide, fermé et convexe. Alors, il existe une unique solution pour le problème  $(\mathcal{P}^*)$  que nous noterons  $(\widehat{v}, \widehat{y})$  et qui vérifie:

$$\|\widehat{v}\|_{L^2(]0, T[ \times \omega)} \leq \|v\|_{L^2(]0, T[ \times \omega)} \quad .$$

■

### 3.5.1 Construction de la sentinelle

Dans cette section, nous allons caractériser le contrôle optimal. Pour plus de commodité, nous allons d'abord effectuer un changement de variable, cette méthode a été déjà utilisé dans des cas similaires ( voir [8]).

Alors soit la fonction  $\zeta \in C^\infty((0, T))$  présentée par

$$\left| \begin{array}{l} \zeta(t) = 0 \quad \text{pour } t \in (0, \frac{T}{4}), \\ \zeta(t) = 1 \quad \text{pour } t \in (\frac{3T}{4}, T), \\ |\zeta'(t)| \leq \frac{C}{T} \quad \text{pour } t \in (0, T). \end{array} \right.$$

Posons maintenant  $y = Y + \zeta \bar{y}$ , où  $\bar{y}$  est solution du système suivant

$$\begin{cases} -\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - q \cdot \nabla \bar{y} - \Delta \bar{y} = 0 & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial \nu} + \frac{I}{K} \bar{y} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \bar{y}(T, x) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.28)$$

et nous avons

$$\begin{cases} -\frac{\partial Y}{\partial t} - q \cdot \nabla Y - \Delta Y = -\zeta'(t) \bar{y} + v \chi_\omega + h_0 \chi_O & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial Y}{\partial \nu} + \frac{I}{K} Y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ Y(T, x) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.29)$$

Nous introduisons maintenant la fonctionnelle  $\mathcal{J}_\varepsilon$  définie pour  $\varepsilon > 0$ , par :

$$\begin{cases} \mathcal{J}_\varepsilon(\varphi^0) = \frac{1}{2} \iint_{]0, T[ \times \omega} |\varphi|^2 dx dt + \varepsilon \|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} + \iint_Q h_0 \chi_O \varphi dx dt \\ - \iint_Q \zeta'(t) \bar{y} \varphi dx dt, \end{cases}$$

$\varphi$  est la solution de (3.23) associée.

**Remarque 3.12** *La contrôlabilité à zéro pour le système (3.10) est équivalente à trouver le contrôle  $v \in L^2(]0, T[ \times \omega)$  tel que la solution associée au problème (3.29) satisfait :*

$$Y(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.30)$$

Nous considérons à présent, le problème sans contrainte suivant

$$(\mathcal{P}^*_\varepsilon) \begin{cases} \min \mathcal{J}_\varepsilon(\varphi^0), \\ \varphi^0 \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

**Proposition 3.13** *La fonctionnelle  $\mathcal{J}_\varepsilon$  est coercive.*

**Preuve** - Pour prouver qu'elle est coercive, il faut montrer l'inégalité suivante:

$$\liminf_{\|\varphi^o\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{J}_\varepsilon(\varphi^o)}{\|\varphi^o\|_{L^2(\Omega)}} \geq \varepsilon. \quad (3.31)$$

Pour montrer (3.31), on procède comme dans [35].

Soit donc  $(\varphi_j^o) \subset L^2(\Omega)$  une suite de données initiales du système (3.23) avec  $\|\varphi_j^o\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty$ . Posons

$$\tilde{\varphi}_j^o = \frac{\varphi_j^o}{\|\varphi_j^o\|_{L^2(\Omega)}}, \quad \tilde{\varphi}_j = \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j^o\|_{L^2(\Omega)}}$$

pour normaliser à  $\|\tilde{\varphi}_j^o\|_{L^2(\Omega)} = 1$ .

Par ailleurs, soit  $\tilde{\varphi}_j$  la solution de (3.23) avec la donnée initiale  $\tilde{\varphi}_j^o$ . Alors, nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{J}_\varepsilon(\varphi_j^o)}{\|\varphi_j^o\|_{L^2(\Omega)}} &= \frac{1}{2} \|\varphi_j^o\|_{L^2(\Omega)} \iint_{]0,T[\times\omega} |\tilde{\varphi}_j|^2 dxdt + \varepsilon \|\tilde{\varphi}_j^o\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \iint_Q \tilde{\varphi}_j h_o \chi_{\mathcal{O}} dxdt - \iint_Q \zeta'(t) \bar{y} \tilde{\varphi}_j dxdt. \end{aligned}$$

Deux cas peuvent se produire. Le premier est le suivant:

$$\liminf \iint_{]0,T[\times\omega} |\tilde{\varphi}_j|^2 dxdt > 0.$$

Dans ce cas, par application de l'inégalité Cauchy-Schwarz et à l'aide des inégalités de Carleman (3.24) et (3.25). Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\varphi}_j h_o \chi_{\mathcal{O}} dxdt &\geq -C_1 \left( \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} |\tilde{\varphi}_j|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \int_{\Omega} |\mu h_o \chi_{\mathcal{O}}|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq -C_1 \|\mu h_o \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)} \left[ \int_0^T \int_{\omega} |\tilde{\varphi}_j|^2 dxdt \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} - \iint_Q \zeta'(t) \bar{y} \tilde{\varphi}_j dx dt &\geq -C_2 \left( \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \int_{\Omega} |\tilde{\varphi}_j|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \int_{\Omega} |\zeta'(t) \bar{y}|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq -C_2 M^{\frac{1}{2}} \|\bar{y}\|_X \left[ \int_0^T \int_{\omega} |\tilde{\varphi}_j|^2 dx dt \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Il vient des deux dernières relations :

$$\liminf \frac{J_{\varepsilon}(\varphi^o)}{\|\varphi^o\|_{L^2(\Omega)}} \geq \liminf \left[ \varepsilon + \left( \frac{1}{2} \|\varphi_j^o\|_{L^2(\Omega)} - C \right) \left( \int_0^T \int_{\omega} |\tilde{\varphi}_j|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Donc,

$$\liminf_{\|\varphi_j^o\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty} \frac{J_{\varepsilon}(\varphi_j^o)}{\|\varphi_j^o\|_{L^2(\Omega)}} = \infty.$$

Le second cas est le suivant:

$$\liminf \int_0^T \int_{\omega} |\tilde{\varphi}_j|^2 dx dt = 0.$$

Dans ce cas, comme  $(\tilde{\varphi}_j^o)_j$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ , nous pouvons extraire une sous suite  $(\tilde{\varphi}_j^o)_j$  telle que:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_j^o \rightharpoonup \psi^o \text{ converge faiblement dans } L^2(\Omega), \\ \tilde{\varphi}_j \rightharpoonup \psi \text{ converge faiblement dans } L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega)), \end{cases}$$

où  $\psi$  est solution de (3.23) avec la donnée initiale  $\psi^o$ . De plus, par la semi-continuité inférieure, il vient:

$$\int_0^T \int_{\omega} |\psi|^2 dx dt \leq \liminf \int_0^T \int_{\omega} |\tilde{\varphi}_j|^2 dx dt = 0.$$

Par conséquent,

$$\psi = 0 \text{ dans } \omega \times (0, T).$$

Par l'application de la propriété de continuation unique, nous obtenons:

$$\psi = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T).$$

Ainsi,

$\tilde{\varphi}_j \rightharpoonup 0$  converge faiblement dans  $L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ .

Or,

$$\liminf \frac{\mathcal{J}_\varepsilon(\varphi^0)}{\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}} \geq \liminf \left[ \varepsilon + \int_0^T \int_\Omega \tilde{\varphi}_j h_o \chi_O dx dt \right]$$

Donc,

$$\liminf \frac{\mathcal{J}_\varepsilon(\varphi^0)}{\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}} \geq \varepsilon.$$

D'où la relation (3.31) est satisfaite. ■

**Proposition 3.14** *Le problème  $(\mathcal{P}^*_\varepsilon)$  admet une solution unique  $\varphi_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega)$ . De plus, si  $\varphi_\varepsilon$  est solution de (3.23) associée à  $\varphi_\varepsilon^0$  alors,  $(v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \chi_\omega, Y_\varepsilon)$  est solution de  $(\mathcal{P}^*)$ .*

**Preuve** - Comme la fonctionnelle  $\mathcal{J}_\varepsilon$  est continue, strictement convexe et coercive sur  $L^2(\Omega)$ , alors le problème  $(\mathcal{P}^*_\varepsilon)$  admet un minimum unique  $\varphi_\varepsilon^0$ . De plus  $\mathcal{J}_\varepsilon$  est différentiable en  $\varphi_\varepsilon^0$ , donc

$$(\mathcal{J}'_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^0), \varphi^0)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega).$$

Nous obtenons alors (voir [8]),

$$\begin{aligned} & \iint_{]0, T[ \times \omega} \varphi_\varepsilon \varphi \, dx dt + \left( \varepsilon \frac{\varphi_\varepsilon^0}{\|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)}}, \varphi^0 \right)_{L^2(\Omega)} \\ & + \iint_Q \varphi \, h_o \chi_O dx dt - \iint_Q \zeta'(t) \bar{y} \varphi \, dx dt = 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Posons  $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \chi_\omega$  dans l'équation (3.32).

Si nous multiplions la première équation du système (3.29) par  $\varphi$ , nous obtenons après intégration par parties sur  $Q$  :

$$\iint_{]0, T[ \times \omega} \varphi_\varepsilon \varphi \, dx dt + \iint_Q \varphi \, h_o \chi_O dx dt - \iint_Q \zeta'(t) \bar{y} \varphi \, dx dt = \int_\Omega Y(0, \cdot) \varphi^0 dx.$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega} Y(0, \cdot) \varphi^0 dx = -(\varepsilon \frac{\varphi_{\varepsilon}^0}{\|\varphi_{\varepsilon}^0\|_{L^2(\Omega)}}, \varphi^0)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega)$$

ce qui implique que  $(v_{\varepsilon} = \varphi_{\varepsilon} \chi_{\omega}, Y_{\varepsilon})$  est solution de  $(\mathcal{P}^*)$ . ■

**Lemme 3.15** *Sous les mêmes hypothèses précédentes le contrôle  $v_{\varepsilon}$  et la solution  $Y_{\varepsilon}$  du système (3.29) sont respectivement uniformément bornées dans les espaces  $L^2(]0, T[ \times \omega)$  et  $Z$  où*

$$Z = \{Y \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) : Y_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}$$

et convergent vers  $\{\widehat{v}, \widehat{Y}\}$

**Preuve** - Montrons, tout d'abord que le contrôle  $v_{\varepsilon}$  est bornée dans  $L^2(]0, T[ \times \omega)$ . Nous avons d'une part,

$$\|v_{\varepsilon}\|_{L^2(]0, T[ \times \omega)}^2 = \iint_{]0, T[ \times \omega} |\varphi_{\varepsilon}|^2 dx dt,$$

et d'autre part,  $\mathcal{J}_{\varepsilon}(\varphi_{\varepsilon}^0) \leq \mathcal{J}_{\varepsilon}(0) = 0$ . Alors, d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\begin{aligned} \|v_{\varepsilon}\|_{L^2(]0, T[ \times \omega)}^2 &\leq \left( \iint_{]T/4, 3T/4[ \times \Omega} |\varphi_{\varepsilon}|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \iint_{]T/4, 3T/4[ \times \Omega} |\zeta'(t) \bar{y}|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left( \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{\mu^2} |\varphi_{\varepsilon}|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \int_{\Omega} |\mu h_o \chi_{\mathcal{O}}|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Du fait que nous avons l'inégalité (3.24) et par définition de  $v_{\varepsilon}$ , nous obtenons

$$\|v_{\varepsilon}\|_{L^2(]0, T[ \times \omega)}^2 \leq C \|v_{\varepsilon}\|_{L^2(]0, T[ \times \omega)} (\|\bar{y}\|_X + \|\mu h_o \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)}).$$

Ainsi

$$\|v_{\varepsilon}\|_{L^2(]0, T[ \times \omega)} \leq C(\Omega, \mathcal{O}, T, \mu h_o \chi_{\mathcal{O}}).$$

D'où  $v_\varepsilon$  est bornée dans  $L^2([0, T[ \times \omega)$ , et donc on peut extraire de cette suite une sous suite notée aussi  $(v_\varepsilon)$  qui converge vers  $v'$ .

Soit  $Y_\varepsilon$  la solution de (3.29) associée à  $v_\varepsilon$  bornée dans  $Z$  d'après la relation (4.38), donc nous pouvons extraire une sous suite telle que

$$Y_\varepsilon \rightharpoonup Y' \text{ converges faiblement dans } Z.$$

Par le lemme de compacité d'Aubin-Lions [3], l'injection de  $Z$  dans  $L^2(Q)$  est compacte, par conséquent  $Y_\varepsilon \rightharpoonup Y'$  converges fortement dans  $L^2(Q)$ .

Puisque la fonctionnelle  $\mathcal{J}_\varepsilon$  est strictement convexe, le contrôle  $v'$  est unique donc  $v' = \hat{v}$ .

D'autre part,  $Y'$  est solution de (3.10) et par unicité de la solution (Cf. Proposition 3.8), on déduit que  $Y' = \hat{Y}$  avec

$$\hat{Y}(0, \cdot) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

■

**Remarque 3.16** *En conséquence de ce qui précède, nous avons pu montrer l'existence d'un contrôle  $\hat{v} = \hat{\varphi}\chi_\omega \in L^2([0, T[ \times \omega)$  tel que la solution du problème (3.10) satisfait*

$$\hat{y}(0, \cdot) = 0 \text{ dans } \Omega$$

*(contrôlabilité à zéro). D'où la construction d'une sentinelle insensible par rapport aux termes manquants et qui nous permet d'estimer le transfert du polluant (type Cd) dans les racines des plantes définie par la formule suivante*

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \iint_Q (h_o\chi_\mathcal{O} + \hat{\varphi}\chi_\omega)c(\lambda, \tau) \, dxdt.$$





# Chapitre 4

## Inégalité d'observabilité pour le problème d'advection-diffusion

Nous avons vu dans la partie précédente que le problème d'existence d'une sentinelle exacte pour le problème d'advection-diffusion de Nye-Tinker-Barber pour l'absorption de nutriments pour les plantes en domaine pollué, est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro du problème adjoint.

Dans ce chapitre, nous montrons que le problème adjoint est contrôlable à zéro, ce qui assurera l'existence de la sentinelle. Comme nous le savons, la contrôlabilité repose sur une inégalité d'observabilité, qui ici, est démontrée grâce aux inégalités de type Carleman.

### 4.1 Introduction et principaux résultats

Dans cette section, nous allons démontrer l'inégalité d'observabilité. Cette inégalité sera l'outil fondamental qui nous permettra d'obtenir la contrôlabilité

à zéro pour le système adjoint :

$$\begin{cases} -\frac{\partial y}{\partial t} - q(t, x) \cdot \nabla y - \Delta y = v\chi_\omega + h_0\chi_{\mathcal{O}} & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + \frac{I}{K}y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(T, x) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

où le vecteur  $q \in (L^\infty(Q))^N$  avec  $\operatorname{div} q = 0$ ,  $\frac{I}{K} \in L^\infty(\Sigma)$  et  $v \in L^2(]0, T[ \times \omega)$  désigne la fonction de contrôle,  $h_0 \in L^2(\mathcal{O} \times ]0, T[)$  une fonction positive.

**Remarque 4.1** *Il est bien connu que le cas  $\omega = \mathcal{O}$  utilisé par Lions ne nécessite pas de démontrer la contrôlabilité. En effet, dans ce cas il existe toujours une sentinelle (3.17):*

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \int \int_Q (h_0\chi_{\mathcal{O}} + v\chi_\omega)c(\lambda, \tau) \, dxdt,$$

(puisque l'on peut considérer  $v = -h_0$ ).

Considère donc le cas plus réaliste, mais plus compliqué  $\omega \subset \mathcal{O}$  comme dans [22]. En effet, nous pouvons contrôler le système sur une partie du domaine  $\Omega$  et observer sur une autre partie (non loin).

L'objet maintenant est d'établir une inégalité d'observabilité. Ceci reposera principalement sur les travaux classiques de A. Fursikov et O.Yu. Imanuvilov [9].

### 4.1.1 Fonctions poids et principe

Afin d'écrire l'inégalité de Carleman globale relative au système (4.4), nous devons introduire une fonction  $\eta_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ , tel que:

$$\begin{cases} \eta_0(x) > 0 & \text{dans } \Omega \\ \eta_0(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ |\nabla\eta_0(x)| > 0 & \text{dans } \overline{\Omega}/\omega' \end{cases}$$

où  $\omega'$  un ouvert tel que  $\omega' \subset\subset \omega$  (un ouvert non vide), une telle fonction existe bien d'après [9].

Utilisons maintenant la fonction  $\eta_0$  pour définir les fonctions poids. Pour  $\lambda > 0$ , nous posons :

$$\xi(t, x) = \frac{e^{\lambda\eta_0(x)}}{t(T-t)}, \quad \alpha(t, x) = \frac{e^{2\lambda\|\eta_0\|_\infty} - e^{\lambda\eta_0(x)}}{t(T-t)}$$

Alors

$$\nabla\xi = \lambda\nabla\eta_0\xi, \quad \nabla\alpha = -\lambda\nabla\eta_0\xi.$$

Nous avons aussi les propriétés suivantes :

$$|\xi_t| \leq CT\xi^2, \quad \left| \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \right| \leq CT^2\xi^3, \quad (4.2)$$

$$|\alpha_t| \leq CT\xi^2, \quad \left| \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} \right| \leq CT^2\xi^3. \quad (4.3)$$

**Remarque 4.2** *Il est à noter que  $\alpha$  croît vers  $+\infty$  dans les deux cas où  $t \rightarrow T$  ou bien  $t \rightarrow 0$ . Mais  $\alpha$  est uniformément bornée sur  $\Omega \times [\delta, T - \delta]$  pour tout  $\delta > 0$ .*

*D'autre part, pour tout  $s > 0$ , la fonction  $e^{-s\alpha(t,x)}$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow T$  ou  $t \rightarrow 0$ .*

Nous tenterons maintenant de voir sous quelles hypothèses nous pourrions obtenir l'inégalité d'observabilité pour les solutions faibles du problème adjoint associé à (4.1).

Pour pouvoir utiliser les résultats de [9], nous considérons le problème de chaleur associé à notre problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = -q \cdot \nabla\varphi & \text{dans } Q, \\ (\nabla\varphi - q(t,x)\varphi) \cdot \vec{\nu} + \frac{1}{K}\varphi = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi(x, 0) = \varphi^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.4)$$

avec  $(q\varphi) \in (L^2(Q))^N$  et  $(\frac{I}{K}\varphi) \in L^2(\Sigma)$ ,  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ .

L'existence et l'unicité de la solution pour le système (4.4) sont assurées par la définition suivante :

**Définition 4.3** *Le système (4.4) admet la formulation faible suivante*

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, v \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} + \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla v dx = - \int_{\Omega} q\varphi \cdot \nabla v dx \\ \quad + \int_{\Gamma} (\frac{I}{K}\varphi)v d\gamma \quad p.p \ t \in ]0, T[, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \\ \varphi(x, 0) = \varphi^0 \text{ dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.5)$$

où  $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ .

## 4.2 Inégalité de Carleman globale

Le résultat le plus important dans cette section sera d'obtenir l'inégalité d'observabilité. Celle-ci est donnée par le théorème suivant que nous allons démontrer plus loin :

**Théorème 4.4** *Il existe  $\bar{s} > 0$ ,  $\bar{\lambda} > 0$  et une constante positive  $C = C(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T)$  et il existe  $\sigma_1, \sigma_2$  telles que, pour tout  $\lambda \geq \bar{\lambda}$  et tout  $s \geq \bar{s} = \sigma_1(e^{\sigma_2 \lambda} T + T^2)$ , la solution faible du problème (4.4) satisfait:*

$$\begin{aligned} & \int \int_Q e^{-2s\alpha} (s\lambda^2 \xi |\nabla \varphi|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2) dx dt + s^2 \lambda^3 \int \int_{\Sigma} e^{-2s\alpha} \xi^2 |\varphi|^2 d\gamma dt \\ & \leq C(\Omega, \omega) \left( s^2 \lambda^2 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^2 |q\varphi|^2 dx dt + s\lambda \int \int_{\Sigma} e^{-2s\alpha} \xi |\frac{I}{K}\varphi|^2 dx dt \right. \\ & \quad \left. + s^3 \lambda^4 \int \int_{\omega \times ]0, T[} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

**Remarque 4.5** *L'inégalité de Carleman globale pour le problème adjoint (4.4) nous permet d'en déduire l'inégalité d'observabilité suivante:*

$$\iint_{\Omega \times (\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})} |\varphi|^2 dxdt \leq M \iint_{\omega \times ]0, T[} |\varphi|^2 dxdt.$$

avec  $M$  une constante qui sera précisée dans la démonstration du théorème.

### 4.2.1 Etapes de la preuve du théorème 4.4

Dans la démonstration du théorème 4.4, on suit une méthode "de dualité" qui permet d'affaiblir les hypothèses de régularité que l'on impose sur les données. On utilise pour cela les idées de [13] :

- Nous considérons (4.4) comme un système d'équation de la chaleur avec second membre  $q \cdot \nabla \varphi$  afin obtenir des estimations de  $\varphi$  et  $\nabla \varphi$ .
- Nous nous basons dans la démonstration sur une inégalité de Carleman pour les solutions du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta \phi = f & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \phi(x, 0) = \phi_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.7)$$

avec  $f \in L^2(Q)$  et  $\phi_0 \in L^2(\Omega)$  qui satisfont :

$$s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\phi|^2 dxdt \leq C \left( \iint_Q e^{-2s\alpha} |f|^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\phi|^2 dxdt \right).$$

- Nous utilisons les résultats classiques de contrôlabilité pour le système de chaleur (4.7), ce qui nous permettra par la suite, d'obtenir des termes qui peuvent être bornés par :

$$s^3 \lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt.$$

### 4.3 Contrôle de la chaleur avec condition de Neuman homogène

Tout d'abord, nous allons rappeler l'inégalité de Carleman pour l'équation de la chaleur avec condition aux limites de type Neuman homogène.

Nous considérons, alors, pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné convexe avec une frontière régulière  $\Gamma$ , le problème (4.7).

Nous introduisons l'espace

$$\mathcal{V} = \left\{ \phi \in C^2(\overline{Q}), \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \Sigma \right\}. \quad (4.8)$$

Une inégalité de Carleman pour le problème (4.7) dans le cas (4.8) nous sera fournie par la proposition suivante.

**Proposition 4.6** *Pour  $f \in L^2(Q)$ , il existe une constante positive  $C = C(\Omega, \omega, \mathcal{O}, T)$  et  $\lambda^*, \sigma^*$  tel pour tout  $\lambda \geq \lambda^*$  et  $s \geq s^*(\lambda)$  avec  $\phi^0 \in L^2(\Omega)$ , la solution faible du système (4.7) satisfait l'inégalité suivante:*

$$s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\phi|^2 dx dt \leq C \left( \iint_Q e^{-2s\alpha} |f|^2 dx dt + s^3 \lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\phi|^2 dx dt \right). \quad (4.9)$$

**Preuve** - Pour la démonstration, on se réfère à A. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov [9]. On trouve également la démonstration dans Imanuvilov [12].

■

Définissons maintenant les solutions du problème (4.4) par transposition de la manière suivante :

**Définition 4.7** *Soit  $\varphi$  la solution par transposition du problème (4.4), c'est-à-dire, l'unique fonction dans  $L^2(Q)$  qui vérifie :*

$$\iint_Q \varphi g dx dt = \iint_Q (-q\varphi) \cdot \nabla z dx dt + \iint_{\Sigma} \left(\frac{I}{K}\varphi\right) z d\gamma dt + \int_{\Omega} \varphi^0 z(x, 0) dx.$$

où  $g \in L^2(Q)$  une fonction donnée et  $z$  est la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = g(t, x) & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ z(T, x) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

**Remarque 4.8** La définition 4.7, nous permet d'établir le lien entre le système (4.4) et le système adjoint (4.10).

### 4.3.1 Optimalité et coût du contrôle

Notre but dans cette partie est de mesurer le coût optimal du contrôle pour l'équation de la chaleur (4.10) en utilisant, entre autres, l'inégalité de Carleman (4.9) et le théorème de Reisz.

Nous nous intéressons donc, selon la technique utilisée par [11], au problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \frac{1}{2} \left( \iint_Q e^{2s\alpha} |z|^2 dxdt + s^{-3} \lambda^{-4} \iint_{]0, T[ \times \omega} e^{2\alpha s} \xi^{-3} |v|^2 dxdt \right) \\ v \in L^2(]0, T[ \times \omega) \\ \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = g(t, x) & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ z(T, x) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ z(0, x) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

**Remarque 4.9** La résolution du problème (4.11) ci-dessus nous permet d'obtenir des estimations en fonction de  $\varphi$  solution du problème (4.4). Plus précisément, nous obtenons des termes qui sont bornés par :

$$s^3 \lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt.$$

Nous considérons dans la suite sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ , l'application donnée par :

$$\mathcal{K}(p, \phi) = \iint_Q e^{-2s\alpha} \mathcal{L}p \mathcal{L}\phi \, dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2\alpha s} \xi^3 p \phi \, dxdt$$

où  $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$  et  $\mathcal{L}^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$  son adjoint formel.

On déduit sans difficulté le:

**Lemme 4.10** *La forme bilinaire  $\mathcal{K}(\cdot, \cdot)$  est un produit scalaire.*

**Preuve** - Il est clair que  $\mathcal{K}(\cdot, \cdot)$  est bilinaire, symétrique et positive

$$\mathcal{K}(\phi, \phi) = \iint_Q e^{-2s\alpha} |\mathcal{L}\phi|^2 \, dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2\alpha s} \xi^3 |\phi|^2 \, dxdt \geq 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{V}.$$

Il reste à montrer que

$$\mathcal{K}(\phi, \phi) = 0 \Rightarrow \phi = 0,$$

on a  $\mathcal{K}(\phi, \phi) = 0$  implique  $\iint_Q e^{-2s\alpha} |\mathcal{L}\phi|^2 \, dxdt = 0$  et

$$\iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2\alpha s} \xi^3 |\phi|^2 \, dxdt = 0$$

Par application de l'inégalité (4.9), on déduit

$$s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\phi|^2 \, dxdt = 0 \text{ donc } \phi = 0 \text{ dans } Q$$

■

**Remarque 4.11** *Soit  $\mathcal{V}_0$  l'espace complété de  $\mathcal{V}$  pour la norme définie par:*

$$\|\phi\|_{\mathcal{V}_0} = \sqrt{\mathcal{K}(\phi, \phi)}.$$

*Alors,  $\mathcal{V}_0$  est un espace de Hilbert. De plus,  $\mathcal{V}$  dense dans  $\mathcal{V}_0$ .*



Nous considérons maintenant la forme linéaire suivante

$$l : \mathcal{V}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi \longmapsto l(\phi) = s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2\alpha s} \xi^3 \varphi \phi dxdt + \iint_Q h_0 \chi_{\mathcal{O}} \phi dxdt.$$

**Proposition 4.12** *Nous nous mettons dans les conditions de la proposition 4.6. Alors, si  $\|\mu h_0 \chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)} < +\infty$  pour  $\mu = e^{\alpha s} \xi^{\frac{-3}{2}}$  une fonction positive dans  $C^2(Q)$  telle que  $\frac{1}{\mu}$  soit bornée, il existe un unique élément  $\bar{p} \in \mathcal{V}_0$  tel que :*

$$\mathcal{K}(\bar{p}, \phi) = l(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{V}_0. \quad (4.12)$$

**Preuve** - Afin de pouvoir appliquer le théorème de Reisz, il est nécessaire de montrer que  $\mathcal{K}(\cdot, \cdot)$  et  $l(\cdot)$  sont continues sur  $\mathcal{V}_0$ .

Montrons d'abord que  $\mathcal{K}(\cdot, \cdot)$  est continue. Alors,

$$|\mathcal{K}(p, \phi)| \leq \iint_Q e^{-2s\alpha} |\mathcal{L}p| |\mathcal{L}\phi| dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2\alpha s} \xi^3 |p| |\phi| dxdt.$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient d'une part,

$$|\mathcal{K}(p, \phi)| \leq \left( \iint_Q e^{-2s\alpha} |\mathcal{L}p|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \iint_Q e^{-2s\alpha} |\mathcal{L}\phi|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left( s^3 \lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2\alpha s} \xi^3 |p|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left( s^3 \lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2\alpha s} \xi^3 |\phi|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}}$$

et d'autre part,

$$\left( \iint_Q e^{-2s\alpha} |\mathcal{L}p|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|p\|_{\mathcal{V}_0},$$

$$\left( s^3 \lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2\alpha s} \xi^3 |p|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|p\|_{\mathcal{V}_0},$$

et

$$\left( \iint_Q e^{-2s\alpha} |\mathcal{L}\phi|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\phi\|_{\mathcal{V}_0},$$

$$\left( s^3 \lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2\alpha s} \xi^3 |\phi|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\phi\|_{\mathcal{V}_0}.$$

Ce qui implique que,

$$|\mathcal{K}(p, \phi)| \leq 2\|p\|_{\mathcal{V}_0}\|\phi\|_{\mathcal{V}_0}.$$

ainsi,  $\mathcal{K}(\cdot, \cdot)$  est continue.

Il reste à montrer que  $l(\cdot)$  est continue. Pour cela, nous avons

$$|l(\phi)| \leq s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2\alpha s\xi^3}|\varphi\phi| \, dxdt + \iint_Q |(h_0\chi_{\mathcal{O}})\phi| \, dxdt.$$

Par application de l'inégalité de Cauchy Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} |l(\phi)| &\leq C_1 \left( s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2\alpha s\xi^3}|\varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2\alpha s\xi^3}|\phi|^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C_2 \left( s^{-3}\lambda^{-4} \iint_Q e^{2\alpha s\xi^3}|h_0\chi_{\mathcal{O}}|^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left( s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2\alpha s\xi^3}|\phi|^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Et comme  $\|\mu h_0\chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)} < +\infty$ , on déduit

$$|l(\phi)| \leq C \left( s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2\alpha s\xi^3}|\phi|^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.13)$$

De plus, l'inégalité de Carleman (4.9) donne

$$s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2\alpha s\xi^3}|\phi|^2 \, dxdt \leq \|\phi\|_{\mathcal{V}_0}^2 \quad (4.14)$$

Ainsi, de (4.13) et (4.14), on déduit

$$|l(\phi)| \leq C\|\phi\|_{\mathcal{V}_0}.$$

D'où  $l$  est continue.

Par suite, toutes les conditions du théorème de Reisz sont remplies. Par conséquent, il existe  $\bar{p} \in X$  tel que

$$\mathcal{K}(\bar{p}, \phi) = l(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{V}_0.$$

■

**Proposition 4.13** *Sous les hypothèses de la proposition 4.12, soit  $\bar{p} \in \mathcal{V}_0$  l'unique solution de (4.12).*

*Nous posons*

$$\widehat{v} = -s^3 \lambda^4 e^{-2\alpha s} \xi^3 \bar{p} \chi_\omega, \text{ et } \widehat{z} = e^{-2\alpha s} L\bar{p}. \quad (4.15)$$

*et nous choisissons*

$$g = s^3 \lambda^4 e^{-2\alpha s} \xi^3 \varphi + \widehat{v} \chi_\omega + h_o \chi_\mathcal{O}.$$

*Alors  $(\widehat{v}, \widehat{z})$  est solution du problème optimal (4.11).*

*De plus, la solution  $(\widehat{v}, \widehat{z})$  satisfait les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \iint_Q e^{2s\alpha} |\widehat{z}|^2 dxdt &+ s^{-3} \lambda^{-4} \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{2s\alpha} \xi^{-3} |\widehat{v}|^2 dxdt \\ &\leq C(\Omega, \omega) \left( s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt \right. \\ &\quad \left. + s^{-3} \lambda^{-4} \iint_Q \mu^2 |h_o \chi_\mathcal{O}|^2 dxdt \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

*et*

$$\begin{aligned} &s^{-2} \lambda^{-2} \iint_Q \xi^{-2} e^{-2s\alpha} |\nabla \widehat{z}|^2 dxdt + \iint_Q e^{2s\alpha} |\widehat{z}|^2 dxdt \\ &+ s^{-3} \lambda^{-4} \iint_{\omega \times ]0, T[} \xi^{-3} e^{2s\alpha} |\widehat{v}|^2 dxdt + s^{-1} \lambda^{-1} \iint_\Sigma \xi^{-1} e^{2s\alpha} |\widehat{z}|^2 d\gamma dt \\ &\leq C \left( s^3 \lambda^4 \iint_Q \xi^3 e^{-2s\alpha} |\varphi|^2 dxdt + s^{-3} \lambda^{-4} \iint_Q \mu^2 |h_o \chi_\mathcal{O}|^2 dxdt \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

**Preuve** - Comme  $\bar{p}$  est solution du problème variationnel (4.12), alors :

$$\begin{aligned} \iint_Q e^{-2s\alpha} \mathcal{L}\bar{p} \mathcal{L}\phi dxdt &+ s^3 \lambda^4 \iint_\omega \xi^3 e^{-2s\alpha} \bar{p} \phi dxdt \\ &= s^3 \lambda^4 \iint_Q \xi^3 e^{-2s\alpha} \varphi \phi dxdt + \iint_Q h_o \chi_\mathcal{O} \phi dxdt \end{aligned}$$

pour tout  $\phi \in \mathcal{V}_0$ . Or, le couple  $(\widehat{v}, \widehat{z})$  satisfait (4.15). Donc, nous avons :

$$\begin{aligned} \iint_Q \widehat{z} \mathcal{L}\phi dxdt - \iint_\omega \widehat{v} \phi dxdt &= s^3 \lambda^4 \iint_Q \xi^3 e^{-2s\alpha} \varphi \phi dxdt \\ &+ \iint_Q h_o \chi_\mathcal{O} \phi dxdt. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Maintenant, en utilisant (4.3.1) dans (4.18), on trouve :

$$\iint_Q \widehat{z} \mathcal{L} \phi \, dx dt = \iint_Q g \phi \, dx dt. \quad \forall \phi \in \mathcal{V}_0. \quad (4.19)$$

L'équation (4.19) est vraie en particulier pour  $\phi \in D(Q) \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{V}_0$ , donc

$$\langle \widehat{z}, \mathcal{L} \phi \rangle_{L^2(Q)} = \langle g, \phi \rangle_{L^2(Q)} \quad \forall \phi \in D(Q).$$

D'où,

$$\langle \mathcal{L}^* \widehat{z}, \phi \rangle_{L^2(Q)} = \langle g, \phi \rangle_{L^2(Q)} \quad \forall \phi \in D(Q).$$

Enfin, nous déduisons que:

$$\mathcal{L}^* \widehat{z} = s^3 \lambda^4 e^{-2\alpha s} \xi^3 \varphi + v \chi_\omega + h_o \chi_O \quad \text{dans } Q. \quad (4.20)$$

Comme  $g \in L^2(Q)$ , donc  $\mathcal{L}^* \widehat{z} \in L^2(Q)$ , de plus  $\widehat{z} \in L^2(Q)$ .

Par application du théorème de Lions-Magenes [19], les fonctions  $\frac{\partial \widehat{z}}{\partial \nu}$  et  $\widehat{z}(T)$ ,  $\widehat{z}(0)$  existent.

Nous multiplions l'équation (4.20) par  $\psi \in \mathcal{C}^2(\overline{Q})$  et nous intégrons par parties sur  $Q$ , nous trouvons:

$$\begin{aligned} \iint_Q \mathcal{L}^* \widehat{z} \psi \, dx dt &= \iint_Q \widehat{z} \mathcal{L} \psi \, dx dt - \int_\Omega \widehat{z}(T) \psi(T) \, dx + \int_\Omega \widehat{z}(0) \psi(0) \, dx \\ &\quad - \iint_\Sigma \frac{\partial \widehat{z}}{\partial \nu} \psi \, d\gamma dt + \int \int_\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \widehat{z} \, d\gamma dt. \end{aligned} \quad (4.21)$$

En utilisant (4.20) dans (4.21), nous obtenons:

$$\begin{aligned} \iint_Q g \psi \, dx dt &= \iint_Q \widehat{z} \mathcal{L} \psi \, dx dt - \int_\Omega \widehat{z}(T) \psi(T) \, dx \\ &\quad + \int_\Omega \widehat{z}(0) \psi(0) \, dx - \iint_\Sigma \frac{\partial \widehat{z}}{\partial \nu} \psi \, d\gamma dt \\ &\quad + \int \int_\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \widehat{z} \, d\gamma dt. \end{aligned}$$

L'équation (4.19) reste vraie, en particulier pour  $\phi = \psi \in \mathcal{V} \subset \mathcal{C}^2(\overline{Q})$  donc,

$$\iint_Q \widehat{z} \mathcal{L} \psi \, dx dt = \int \int_Q g \psi \, dx dt.$$

Ainsi, nous avons

$$- \int_{\Omega} \widehat{z}(T) \psi(T) dx + \int_{\Omega} \widehat{z}(0) \psi(0) dx + \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \widehat{z} - \frac{\partial \widehat{z}}{\partial \nu} \psi \right) d\gamma dt = 0.$$

En particulier pour  $\psi \in \mathcal{V}$ , tel que  $\psi(0) = \psi(T) = 0$ . Alors, il vient de cette équation

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial \widehat{z}}{\partial \nu} \psi d\gamma dt = 0,$$

ainsi,

$$\frac{\partial \widehat{z}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Il en est de même pour  $\psi \in \mathcal{V}$ , tel que  $\psi(0) = 0$ , alors

$$\int_{\Omega} \widehat{z}(T) \psi(T) dx = 0.$$

Ainsi,

$$\widehat{z}(T) = 0.$$

Enfin, nous avons

$$\int_{\Omega} \widehat{z}(0) \psi(0) dx = 0,$$

d'où,

$$\widehat{z}(0) = 0.$$

D'autre part, l'application  $v \rightarrow \|v\|_{L^2(\omega \times (0,T))}^2$  est continue, coercive et strictement convexe et par ce qui précède, l'ensemble des contraintes est fermé non vide.

Par conséquent, le couple  $(\widehat{v}, \widehat{z})$  est solution unique du problème (4.11).

Montrons maintenant les estimations (4.16) et (4.17). Pour cela, nous posons  $\phi = p$  dans l'équation (4.12),

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(p, p) &= \iint e^{-2\alpha s} |\mathcal{L}p|^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2s\alpha} \xi^3 |p|^2 dxdt \\ &= s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 \varphi p dxdt + \iint_Q h_0 \chi_O p dxdt. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Par définition de  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}_0}$  et l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\begin{aligned} \|p\|_{\mathcal{V}_0}^2 &\leq C \left[ (s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + (s^{-3} \lambda^{-4} \iint_Q e^{2s\alpha} \xi^{-3} |h_0 \chi_{\mathcal{O}}|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} \right] \|p\|_{\mathcal{V}_0}. \end{aligned}$$

Par suite, nous obtenons

$$\|p\|_{\mathcal{V}_0} \leq C \left[ (s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} + (s^{-3} \lambda^{-4} \iint_Q \mu^2 |h_0 \chi_{\mathcal{O}}|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.23)$$

D'autre part, le couple  $(\widehat{v}, \widehat{z})$  vérifie (4.15). Donc, à partir de l'équation (4.22) et l'estimation (4.23), nous obtenons:

$$\begin{aligned} &\iint_Q e^{2s\alpha} |\widehat{z}|^2 dxdt + s^{-3} \lambda^{-4} \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{2s\alpha} \xi^{-3} |\widehat{v}|^2 dxdt \\ &\leq C \left[ (s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} + (s^{-3} \lambda^{-4} \iint_Q \mu^2 |h_0 \chi_{\mathcal{O}}|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} \right]^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant que  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , permet d'avoir

$$\begin{aligned} &\iint_Q e^{-2s\alpha} |\widehat{z}|^2 dxdt + s^{-3} \lambda^{-4} \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{2s\alpha} \xi^{-3} |\widehat{v}|^2 dxdt \\ &\leq C (s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt + s^{-3} \lambda^{-4} \iint_Q \mu^2 |h_0 \chi_{\mathcal{O}}|^2 dxdt). \end{aligned}$$

La dernière estimation (4.17) s'obtient en multipliant l'équation du système (4.11) par  $s^{-2} \lambda^{-2} e^{2s\alpha} \xi^{-2} \widehat{z}$  et en intégrant par parties sur  $Q$  (voir [11]) :

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} s^{-2} \lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha} \xi^{-2} \frac{\partial}{\partial t} |\widehat{z}|^2 dxdt + s^{-2} \lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha} \xi^{-2} |\nabla \widehat{z}|^2 dxdt \\ &- s^{-1} \lambda^{-1} \iint_Q e^{2s\alpha} \xi^{-1} \nabla \eta_0 \nabla |\widehat{z}|^2 dxdt - 2s^{-2} \lambda^{-1} \iint_Q e^{2s\alpha} \xi^{-2} (\nabla \eta_0 \cdot \nabla \widehat{z}) \widehat{z} dxdt \\ &= s^{-2} \lambda^{-2} \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{2s\alpha} \xi^{-2} \widehat{v} \widehat{z} dxdt + s \lambda^2 \iint_Q \xi \varphi \widehat{z} dxdt \\ &+ s^{-2} \lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha} \xi^{-2} \widehat{z} h_0 \chi_{\mathcal{O}} dxdt. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
& s^{-2}\lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha} \xi^{-2} |\nabla \widehat{z}|^2 dxdt - s^{-1}\lambda^{-1} \iint_\Sigma e^{2s\alpha} \xi^{-1} \frac{\partial \eta_0}{\partial \eta} |\widehat{z}|^2 d\gamma dt \\
&= \frac{1}{2} s^{-2}\lambda^{-2} \iint_Q \frac{\partial}{\partial t} (e^{2s\alpha} \xi^{-2}) |\widehat{z}|^2 dxdt - s^{-1}\lambda^{-1} \iint_Q \nabla \cdot (e^{2s\alpha} \xi^{-1} \nabla \eta_0) |\widehat{z}|^2 dxdt \\
&+ 2s^{-2}\lambda^{-1} \iint_Q e^{2s\alpha} \xi^{-2} (\nabla \eta_0 \cdot \nabla \widehat{z}) \widehat{z} dxdt + s\lambda^2 \iint_Q \xi \varphi \widehat{z} dxdt \\
&+ s^{-2}\lambda^{-2} \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{2s\alpha} \xi^{-2} \widehat{v} \widehat{z} dxdt + s^{-2}\lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha} \xi^{-2} \widehat{z} h_0 \chi_{\mathcal{O}} dxdt
\end{aligned} \tag{4.24}$$

D'autre part, pour  $s \geq CT^2$ , nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^{2s\alpha} \xi^{-2}) \leq CT s e^{2s\alpha} e^{2\lambda \|\eta_0\|_\infty}, \tag{4.25}$$

et si de plus,  $C s \xi \geq 1$  pour  $s \geq \frac{T^2}{4C}$ ,

$$|\nabla (e^{2s\alpha} \xi^{-1})| \leq C(\Omega, \omega) s \lambda e^{2s\alpha}. \tag{4.26}$$

Nous majorons maintenant chacun des termes de droite pour l'équation (4.24), en utilisant les propriétés (4.25) et (4.26).

Pour  $\eta_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ , nous trouvons

$$\begin{aligned}
s^{-2}\lambda^{-2} \left| \iint_Q \frac{\partial}{\partial t} (e^{2s\alpha} \xi^{-2}) |\widehat{z}|^2 dxdt \right| &\leq \frac{CT e^{2\lambda \|\eta_0\|_\infty}}{s\lambda^2} \iint_Q e^{2s\alpha} |\widehat{z}|^2 dxdt \\
&\leq C(\Omega, \omega) \iint_Q e^{2s\alpha} |\widehat{z}|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

pour  $s \geq C(\Omega, \omega)(e^{2\lambda \|\eta_0\|_\infty} T)$ ,  $\lambda \geq C(\Omega, \omega)$ .

On a,

$$\begin{aligned}
& \left| s^{-1}\lambda^{-1} \iint_Q \nabla \cdot (e^{2s\alpha} \xi^{-1} \nabla \eta_0) |\widehat{z}|^2 dxdt \right| \\
&= s^{-1}\lambda^{-1} \iint_Q \nabla \cdot (e^{2s\alpha} \xi^{-1}) \nabla \eta_0 |\widehat{z}|^2 dxdt + s^{-1}\lambda^{-1} \iint_Q e^{2s\alpha} \xi^{-1} \Delta \eta_0 |\widehat{z}|^2 dxdt \\
&\leq C \left( \iint_Q e^{2s\alpha} |\widehat{z}|^2 dxdt + s^{-1}\lambda^{-1} \iint_Q e^{2s\alpha} \xi^{-1} |\widehat{z}|^2 dxdt \right) \\
&\leq C(\Omega, \omega) \iint_Q e^{2s\alpha} |\widehat{z}|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

pour  $s \geq C(\Omega, \omega)T^2$ , en effet  $cs^{-1}\lambda^{-1}\xi^{-1} = \frac{Ct(T-t)}{s\lambda e^{\lambda\eta_0}} \leq \frac{cT^2}{s\lambda e^{\lambda\eta_0}}$  avec  $\eta_0 \in C^2(\bar{\Omega})$  et  $\lambda > 0$ .

Pour les autres termes, nous utilisons l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} & 2s^{-2}\lambda^{-2} \left| \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}(\nabla\eta_0 \cdot \nabla\widehat{z})\widehat{z} \, dxdt \right| \\ & \leq C(s^{-2}\lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\widehat{z}|^2 \, dxdt) + s^{-2}\lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\nabla\widehat{z}|^2 \, dxdt, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} & s\lambda^2 \left| \iint_Q \xi\varphi\widehat{z} \, dxdt \right| \\ & \leq C(s^{-1} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\widehat{z}|^2 \, dxdt + s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \, dxdt). \end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} & s^{-2}\lambda^{-2} \left| \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{2s\alpha}\xi^{-2}\widehat{v}\widehat{z} \, dxdt \right| \\ & \leq C(s^{-3}\lambda^{-4} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-3}|\widehat{v}|^2 \, dxdt + s^{-1} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\widehat{z}|^2 \, dxdt). \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue donne

$$\begin{aligned} & s^{-2}\lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}\widehat{z} \, h_o\chi_{\mathcal{O}} \, dxdt \\ & \leq C(s^{-3}\lambda^{-4} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-3} |h_o\chi_{\mathcal{O}}|^2 \, dxdt + s^{-1} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\widehat{z}|^2 \, dxdt). \end{aligned}$$

Par conséquent pour  $\lambda \geq C(\Omega, \omega)$  et  $s \geq C(\Omega, \omega)(e^{2\lambda\|\eta_0\|_\infty}T + T^2)$ , nous avons

$$\begin{aligned} & s^{-2}\lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\nabla\widehat{z}|^2 \, dxdt - s^{-1}\lambda^{-1} \iint_\Sigma e^{2s\alpha}\xi^{-1} \frac{\partial\eta_0}{\partial\eta} |\widehat{z}|^2 \, d\gamma dt \\ & \leq C(\Omega, \omega) \left( \iint_Q e^{2s\alpha}|\widehat{z}|^2 \, dxdt + s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 \, dxdt \right. \\ & \quad \left. + s^{-3}\lambda^{-4} \iint_Q \mu^2 |h_o\chi_{\mathcal{O}}|^2 \, dxdt + s^{-3}\lambda^{-4} \iint_Q e^{2s\alpha}\xi^{-3}|\widehat{v}|^2 \, dxdt \right). \end{aligned}$$



En utilisant (4.16) dans cette dernière inégalité , nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \iint_Q e^{2s\alpha} |\widehat{z}|^2 dxdt + s^{-2}\lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha} \xi^{-2} |\nabla \widehat{z}|^2 dxdt \\
& + s^{-1}\lambda^{-1} \iint_{\Sigma} e^{2s\alpha} \xi^{-1} |\widehat{z}|^2 d\gamma dt + s^{-3}\lambda^{-4} \iint_Q e^{2s\alpha} \xi^{-3} |\widehat{v}|^2 dxdt \\
& \leq C(\Omega, \omega) \left( s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt + s^{-3}\lambda^{-4} \iint_Q \mu^2 |h_o\chi_{\mathcal{O}}|^2 dxdt \right).
\end{aligned}$$

■

**Proposition 4.14** *Sous les mêmes hypothèses précédentes, pour  $\varphi \in L^2(Q)$  solution par transposition du système (4.4), nous avons*

$$\begin{aligned}
s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt & \leq C(\Omega, \omega) \left( s^2\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^2 |q\varphi|^2 dxdt \right. \\
& + s\lambda \iint_{\Sigma} e^{-2s\alpha} \xi \left| \frac{I}{K} \varphi \right|^2 d\gamma dt \\
& \left. + s^3\lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt \right).
\end{aligned}$$

**Preuve** - Comme  $(\widehat{v}, \widehat{z})$  solution de (4.11) tel que

$$g = s^3\lambda^4 e^{-2s\alpha} \xi^3 \varphi + \widehat{v}\chi_{\omega} + h_o\chi_{\mathcal{O}}.$$

et par application de la définition (4.7), nous obtenons

$$\begin{aligned}
s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt & = \iint_Q (-q\varphi) \cdot \nabla \widehat{z} dxdt \\
& + \iint_{\Sigma} \left( \frac{I}{K} \varphi \right) \widehat{z} d\gamma dt - \iint_{\omega \times ]0, T[} \varphi \widehat{v} dxdt - \iint_Q \varphi h_o\chi_{\mathcal{O}} dxdt.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Nous utilisons, maintenant, l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les termes de droite de l'équation (4.27). Alors, pour  $\varphi \in L^2(Q)$  et  $\|\mu h_o\chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(Q)} < +\infty$ , nous trouvons

$$\begin{aligned}
& \left| \iint_Q (-q\varphi) \cdot \nabla \widehat{z} dxdt \right| \\
& \leq C(s^{-2}\lambda^{-2} \iint_Q e^{2s\alpha} \xi^{-2} |\nabla \widehat{z}|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} (s^2\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^2 |q\varphi|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{\Sigma} \left( \frac{I}{K} \varphi \right) \widehat{z} \, d\gamma dt \right| \\ & \leq C(s^{-1}\lambda^{-1} \iint_{\Sigma} e^{2s\alpha\xi} |\widehat{z}|^2 \, d\gamma dt)^{\frac{1}{2}} (s\lambda \iint_{\Sigma} e^{-2s\alpha\xi} \left| \frac{I}{K} \varphi \right|^2 \, d\gamma dt)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

nous avons aussi,

$$\begin{aligned} & \left| - \iint_{\omega \times ]0, T[} \varphi \widehat{v} \, dx dt \right| \\ & \leq C(s^3\lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2s\alpha\xi^3} |\varphi|^2 \, dx dt)^{\frac{1}{2}} (s^{-3}\lambda^{-4} \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{2s\alpha\xi^{-3}} |\widehat{v}|^2 \, dx dt)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \left| - \iint_Q \varphi h_o \chi_O \, dx dt \right| \\ & \leq C(s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^3} |\varphi|^2 \, dx dt)^{\frac{1}{2}} (s^{-3}\lambda^{-4} \iint_Q e^{2s\alpha\xi^{-3}} |h_o \chi_O|^2 \, dx dt)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Comme  $\|\mu h_o \chi_O\|_{L^2(Q)} < +\infty$ , nous posons

$$C(\Omega, \omega) (s^{-3}\lambda^{-4} \iint_Q e^{2s\alpha\xi^{-3}} |h_o \chi_O|^2 \, dx dt)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2},$$

ce qui implique que

$$\left| - \iint_Q \varphi h_o \chi_O \, dx dt \right| \leq \frac{1}{2} (s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^3} |\varphi|^2 \, dx dt). \quad (4.28)$$

Finalement, d'après les inégalités (4.17)-(4.28), nous trouvons

$$\begin{aligned} s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^3} |\varphi|^2 \, dx dt & \leq C(\Omega, \omega) (s^2\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^2} |q\varphi|^2 \, dx dt \\ & + s\lambda \iint_{\Sigma} e^{-2s\alpha\xi} \left| \frac{I}{K} \varphi \right|^2 \, d\gamma dt \\ & + s^3\lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2s\alpha\xi^3} |\varphi|^2 \, dx dt). \end{aligned} \quad (4.29)$$

■

**Proposition 4.15** *Sous les mêmes hypothèses précédentes, pour  $\varphi \in L^2(Q)$  solution faible du système (4.4), nous avons*

$$\begin{aligned}
s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi} |\nabla\varphi|^2 dxdt &\leq C(\Omega, \omega) (s^2\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^2} |q\varphi|^2 dxdt \\
&+ s\lambda \iint_{\Sigma} e^{-2s\alpha\xi} \left| \frac{I}{K} \varphi \right|^2 d\gamma dt \\
&+ s^3\lambda^4 \iint_{\omega \times ]0, T[} e^{-2s\alpha\xi^3} |\varphi|^2 dxdt)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

**Preuve** - Nous pouvons maintenant voir  $\varphi$  non seulement comme solution par transposition mais une solution faible de (4.4) pour estimer

$$\iint_Q e^{-2s\alpha(s\lambda^2\xi)} |\nabla\varphi|^2 dxdt$$

Pour ce faire, on remplace par

$$v = s\lambda^2 e^{-2s\alpha(\cdot, t)} \xi(\cdot, t) \varphi(\cdot, t)$$

dans l'équation (4.5) et on intègre par parties par rapport au temps  $[0, T]$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi} \frac{\partial}{\partial t} |\varphi|^2 dxdt &+ s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi} |\nabla\varphi|^2 dxdt \\
&+ s\lambda^2 \iint_Q \nabla\varphi \cdot \nabla(e^{-2s\alpha\xi}) \varphi dxdt \\
&= -s\lambda^2 \iint_Q (q\varphi) \nabla(e^{-2s\alpha\xi} \varphi) dxdt \\
&+ s\lambda^2 \iint_{\Sigma} e^{-2s\alpha\xi} \left( \frac{I}{K} \varphi \right) \varphi d\gamma dt,
\end{aligned}$$

nous intégrons encore une fois par parties, nous trouvons

$$\begin{aligned}
s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi} |\nabla\varphi|^2 dxdt &= \frac{1}{2}s\lambda^2 \iint_Q (e^{-2s\alpha\xi})_t |\varphi|^2 dxdt \\
&+ \frac{s\lambda^2}{2} \iint_Q \Delta(e^{-2s\alpha\xi}) |\varphi|^2 dxdt \\
&- \frac{s\lambda^2}{2} \iint_\Sigma \nabla(e^{-2s\alpha\xi}) |\varphi|^2 d\gamma dt \\
&- s\lambda^2 \iint_Q (q\varphi) \nabla(e^{-2s\alpha\xi}) \varphi dxdt \\
&- s\lambda^2 \iint_Q (q\varphi) \nabla\varphi e^{-2s\alpha\xi} dxdt \\
&+ s\lambda^2 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha\xi} \xi \left(\frac{I}{K}\varphi\right) \varphi d\gamma dt,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

sachant que  $\alpha$  est uniformément bornée sur  $\Omega \times [\delta, T - \delta]$  pour tout  $\delta > 0$  et pour tout  $s > 0$ , la fonction  $e^{-2s\alpha(t,x)}$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow T$  ou  $t \rightarrow 0$ .

D'autre part, en utilisant le fait que

$$(e^{-2s\alpha\xi})_t \leq CTs\xi^3 e^{2\lambda\|\eta_0\|}. \tag{4.32}$$

et

$$|\nabla(e^{2s\alpha\xi})| \leq C(\Omega, \omega) s\lambda e^{-2s\alpha\xi^2}. \tag{4.33}$$

$$|\Delta(e^{2s\alpha\xi})| \leq C(\Omega, \omega) s^2\lambda^2 e^{-2s\alpha\xi^3}. \tag{4.34}$$

Nous obtenons:

$$\left| \frac{1}{2}s\lambda^2 \iint_Q (e^{-2s\alpha\xi})_t |\varphi|^2 dxdt \right| \leq C(\Omega, \omega) Ts^2\lambda^2 e^{2\lambda\|\eta_0\|} \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^3} |\varphi|^2 dxdt.$$

De même pour,

$$\frac{1}{2}s\lambda^2 \iint_\Sigma \nabla(e^{-2s\alpha\xi}) |\varphi|^2 d\gamma dt \leq C\frac{1}{2}s^2\lambda^3 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha\xi^2} |\varphi|^2 d\gamma dt.$$

Nous avons aussi,

$$\left| \frac{1}{2}s\lambda^2 \iint_Q \Delta(e^{-2s\alpha\xi}) |\varphi|^2 dxdt \right| \leq C(\Omega, \omega) s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^3} |\varphi|^2 dxdt.$$

Maintenant, d'après l'inégalité de Young et l'estimation (4.33), nous trouvons:

$$\begin{aligned} \left| -s\lambda^2 \iint_Q (q\varphi) \nabla(e^{-2s\alpha\xi}) \varphi dxdt \right| &\leq C(s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi} |q\varphi|^2 dxdt) \\ &+ \frac{1}{2}s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \left| s\lambda^2 \iint_Q (q\varphi) \nabla \varphi e^{-2s\alpha\xi} dxdt \right| &\leq C(s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi} |q\varphi|^2 dxdt) \\ &+ \frac{1}{2}s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi} |\nabla\varphi|^2 dxdt, \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \iint_{\Sigma} e^{-2s\alpha\xi} \left(\frac{I}{K}\varphi\right) \varphi d\gamma dt &\leq C(s\lambda \iint_{\Sigma} e^{-2s\alpha\xi} \left|\frac{I}{K}\varphi\right|^2 d\gamma dt) \\ &+ s^2\lambda^3 \iint_{\Sigma} e^{-2s\alpha\xi} |\varphi|^2 d\gamma dt. \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (4.31) devient,

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi} |\nabla\varphi|^2 &\leq C\left(Ts^2\lambda^2 e^{2\lambda\|\eta_0\|} \iint_Q e^{-2s\alpha\xi} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt \right. \\ &+ s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt \\ &+ s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi} |q\varphi|^2 dxdt \\ &+ s^2\lambda^3 \iint_{\Sigma} e^{-2s\alpha\xi} \xi^2 |\varphi|^2 d\gamma dt \\ &+ s\lambda \iint_{\Sigma} e^{-2s\alpha\xi} \left|\frac{I}{K}\varphi\right|^2 d\gamma dt) \\ &+ \frac{1}{2}s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi} |\nabla\varphi|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Reste à estimer le terme

$$s^2\lambda^3 \iint_{\Sigma} e^{-2s\alpha\xi} \xi^2 |\varphi|^2 d\gamma dt.$$

En utilisant, d'une part, l'intégration par parties pour,

$$\begin{aligned} -s^2\lambda^3 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^2}(\nabla\eta_0 \cdot \nabla\varphi)\varphi dxdt &= -\frac{1}{2}s^2\lambda^3 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha\xi^2} \frac{\partial\eta_0}{\partial\eta} |\varphi|^2 d\gamma dt \\ &+ \frac{1}{2}s^2\lambda^3 \iint_Q \nabla(e^{-2s\alpha\xi^2}\nabla\eta_0)|\varphi|^2 d\gamma dt. \end{aligned}$$

Et d'autre part, l'inégalité de Young pour le terme de gauche avec  $\eta_0 \in C^2(\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned} -s^2\lambda^3 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^2}(\nabla\eta_0 \cdot \nabla\varphi)\varphi dxdt &\leq C(s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^3}|\varphi|^2 dxdt \\ &+ s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi}|\nabla\varphi|^2 dxdt). \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} s^2\lambda^3 \iint_Q \nabla(e^{-2s\alpha\xi^2}\nabla\eta_0)|\varphi|^2 dxdt &\leq C(s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^3}|\varphi|^2 dxdt \\ &+ s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi}|\nabla\varphi|^2 dxdt). \end{aligned}$$

Nous obtenons,

$$\begin{aligned} s^2\lambda^3 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha\xi^2}|\varphi|^2 d\gamma dt &\leq C(s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^3}|\varphi|^2 dxdt \\ &+ s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi}|\nabla\varphi|^2 dxdt). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Donc

$$\begin{aligned} s^2\lambda^3 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha\xi^2}|\varphi|^2 d\gamma dt &\leq C(s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^3}|\varphi|^2 dxdt \\ &+ s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi}|\nabla\varphi|^2 dxdt). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Finalement, d'après les inégalités (4.29), (4.35) et (4.37), nous trouvons directement l'inégalité de Carleman globale voulue. ■

**Remarque 4.16** *Ainsi, la démonstration du théorème 4.4 est achevée.*

### 4.3.2 Evaluation de la constante de majoration $M$

Dans cette dernière partie de ce chapitre, on donne avec précision la valeur de la constante de majoration  $M$  dans l'inégalité d'observabilité. On utilise d'abord le résultat suivant de S. Guerrero [11] (Théorème 2, page 444). D'où nous déduisons les propositions suivantes :

**Proposition 4.17** *On suppose que  $q \in L^\infty(\Omega)$  avec  $\operatorname{div} q = 0$  et que  $f = v\chi_\omega + h_0\chi_\emptyset \in L^2(Q)$ . Alors le système (3.10) admet une unique solution dans l'espace  $X = L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  et  $y_t \in L^2(]0, T[; H^{-1}(\Omega))$ . De plus, il existe une constante  $C > 0$ ,  $C = C(\Omega, \omega)$ , tel que la solution  $y$  satisfait l'estimation suivante:*

$$\|y\|_X \leq \exp\left(CT(1 + \|q\|_\infty^2 + \|\frac{I}{K}\|_\infty^2)\right) \cdot \|f\|_{L^2(Q)}. \quad (4.38)$$

**Preuve** - Pour vérifier l'unicité de la solution pour le système (3.10), nous appliquons la même démonstration effectuée pour prouver le théorème 2.4. L'inégalité (4.38) est obtenue par le théorème de trace pour les fonctions dans  $H^1(\Omega)$ . Pour plus de détails, nous pourrions consulter [11].

■

**Proposition 4.18** *Sous les hypothèses précédentes, pour tout  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ , la solution du problème adjoint (4.4) satisfait l'estimation suivante:*

$$\iint_{] \frac{T}{4}, \frac{3T}{4} [ \times \Omega} |\varphi|^2 dxdt \leq M \iint_{]0, T[ \times \omega} |\varphi|^2 dxdt, \quad (4.39)$$

pour  $M$  une constante de la forme

$$M = \exp\left\{C\left(1 + \frac{1}{T} + \|q\|_\infty^2 + \|\frac{I}{K}\|_\infty^2\right)\right\}$$

**Preuve** - Soit  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ , comme  $\varphi$  est solution du système (4.4) avec

$$(q\varphi) \in L^2(Q)^N \text{ et } \left(\frac{I}{K}\varphi\right) \in L^2(\Sigma).$$

Et par application du théorème 4.4, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & \iint_Q e^{-2s\alpha}(s\lambda^2\xi|\nabla\varphi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\varphi|^2)dxdt + s^2\lambda^3 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi^2|\varphi|^2d\gamma dt \\ & \leq C(\Omega, \omega) \left( s^2\lambda^2\|q\|_\infty^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^2|\varphi|^2dxdt + s\lambda\left\|\frac{I}{K}\right\|_\infty^2 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi|\varphi|^2dxdt \right. \\ & \quad \left. + s^3\lambda^4 \iint_{]0,T[\times\omega} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2dxdt \right), \end{aligned} \quad (4.40)$$

pour  $\lambda$  suffisamment grand et  $s \geq \bar{s} = \sigma_1(e^{\sigma_2\lambda T} + T^2)$ .

Maintenant, le fait de supposer  $s \geq CT^2\|q\|_\infty^2$  nous permet d'absorber le premier terme de l'intégrale qui se trouve dans le membre de droite de l'intégrale précédente, Nous obtenons alors

$$Cs^2\lambda^2\|q\|_\infty^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^2|\varphi|^2dxdt \leq \frac{1}{2}s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2dxdt. \quad (4.41)$$

D'autre part, pour  $s \geq CT^2\left\|\frac{I}{K}\right\|_\infty^2$ , on a

$$s\lambda\left\|\frac{I}{K}\right\|_\infty^2 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi|\varphi|^2dxdt \leq \frac{1}{2}s^2\lambda^3 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi^2|\varphi|^2d\gamma dt. \quad (4.42)$$

Utilisant maintenant les estimations (4.41) et (4.42) dans (4.40), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}s^3\lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2dxdt + \frac{1}{2}s^2\lambda^3 \iint_\Sigma e^{-2s\alpha}\xi^2|\varphi|^2d\gamma dt \\ & \leq C(\omega, \Omega) \iint_{]0,T[\times\omega} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2dxdt. \end{aligned} \quad (4.43)$$

ce qui entraîne, pour  $\lambda$  suffisamment grand et  $s \geq \bar{s} = \sigma_1(e^{\sigma_2\lambda T} + T^2(1 + \|q\|_\infty^2 + \left\|\frac{I}{K}\right\|_\infty^2))$  l'estimation suivante

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2dxdt \leq C(\omega, \Omega) \iint_{]0,T[\times\omega} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2dxdt. \quad (4.44)$$



D'autre part, la fonction

$$t \longrightarrow \exp \left( - 2s \max_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(t) \right) \min_{x \in \bar{\Omega}} \xi^3(t),$$

atteint son minimum dans  $]T/4, 3T/4[$  à  $\frac{T}{4}$ , et la fonction

$$t \longrightarrow \exp \left( - 2s \min_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(t) \right) \max_{x \in \bar{\Omega}} \xi^3(t),$$

atteint son maximum dans  $]0, T[$  à  $\frac{T}{2}$ . Alors, l'inégalité (4.44) donne

$$\begin{aligned} \iint_{] \frac{T}{4}, \frac{3T}{4} [ \times \Omega} |\varphi|^2 dx dt &\leq -2s \left\{ \exp \left( \min_{x \in \bar{\Omega}} \alpha \left( x, \frac{T}{2} \right) - \max_{x \in \bar{\Omega}} \alpha \left( x, \frac{T}{4} \right) \right) \right\} \\ &\times \min_{x \in \bar{\Omega}} \xi^{-3} \left( x, \frac{T}{4} \right) \max_{x \in \bar{\Omega}} \xi^3 \left( x, \frac{T}{2} \right) \iint_{]0, T[ \times \omega} |\varphi|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (4.45)$$

pour les mêmes paramètres  $s$  et  $\lambda$ .

Enfin, pour  $\lambda = \bar{\lambda}$  et  $s = \bar{s} = \bar{\sigma} (e^{4\bar{\lambda}\|\eta_0\|_\infty} T + T^2 (1 + \|q\|_\infty^2 + \|\frac{I}{K}\|_\infty^2))$ , nous obtenons

$$\iint_{] \frac{T}{4}, \frac{3T}{4} [ \times \Omega} |\varphi|^2 dx dt \leq C(\Omega, \omega) e^{C(\Omega, \omega) \bar{s} / T^2} \iint_{]0, T[ \times \omega} |\varphi|^2 dx dt. \quad (4.46)$$

■



# Chapitre 5

## Sentinelle approchée pour les problèmes de diffusion avec pollution

### 5.1 Formulation faible du problème

Dans cette section, nous nous intéressons à l'analyse mathématique d'un système régi par l'équation de la chaleur avec condition au bord de type Dirichlet. Nous allons étudier l'existence de la solution faible pour ce système qui décrit, en général, un phénomène de diffusion.

On considère un ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  régulier de frontière  $\Gamma$ , et le problème:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } Q = ]0, T[ \times \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma = ]0, T[ \times \Gamma, \\ u(0, x) = u_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $u_0 \in L^2(\Omega)$  est l'état initial,  $f \in L^2(Q)$  un terme source et  $u = u(t, x)$  l'état du système (5.1).

### 5.1.1 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous abordons l'existence d'une solution faible pour le système (5.1) en établissant une formulation faible, elle est considérée comme un élément dans l'espace  $H_0^1(\Omega)$  représentant  $x \rightarrow u(t, x)$  où  $t \in ]0, T[$ .

**Remarque 5.1** *L'espace  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour la norme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  induite par l'espace  $H^1(\Omega)$  mais aussi, d'après l'inégalité de Poincaré, pour la norme réduite  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} = (\int_{\Omega} |\nabla \cdot|^2)^{\frac{1}{2}}$ . C'est cette norme que l'on choisit.*

**Définition 5.2** *La fonction  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$  est dite formulation faible du problème (5.1) si on a*

$$\begin{cases} \langle \frac{\partial u}{\partial t}, \rho \rangle + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \rho dx = \int_{\Omega} \rho f dx & p.p t \in ]0, T[, \quad \forall \rho \in H_0^1(\Omega), \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \quad (5.2)$$

On cherche maintenant à montrer l'existence et l'unicité de solutions pour le problème (5.1). Pour cela, on utilise un théorème de Lions (Allaire [2], Brezis [6]). Ce théorème joue un rôle comparable au théorème de Lax-Milgram.

**Théorème 5.3** *Soient  $u_0 \in L^2(\Omega)$  et  $f \in L^2(]0, T[ \times \Omega)$ . Alors la formulation faible (5.2) admet une unique solution  $u$  telle que*

$$u \in L^2(]0, T[; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$$

**Preuve -**

Tout d'abord, on montre que la forme bilinéaire

$$B(t; u, \rho) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \rho \, dx, \quad (5.3)$$

est continue sur  $H_0^1(\Omega)$ .

En effet, à l'aide de Cauchy-Schwarz on a:

$$|B(t; u, \rho)| \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.4)$$

et d'après l'inégalité de Poincaré, il existe  $C' > 0$

$$|B(t; u, \rho)| \leq C' \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\rho\|_{H_0^1(\Omega)},$$

ce qui implique que la forme bilinéaire  $B$  est continue sur  $H_0^1(\Omega)$ . De plus,  $B$  est coercive. On a

$$B(t; u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (5.5)$$

D'autre part, l'application  $l$  est linéaire continue dans  $H_0^1(\Omega)$ . En effet, il existe  $\beta > 0$

$$\begin{aligned} |l(t; \rho)| &= \left| \int_{\Omega} \rho f \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\rho\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \beta \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\rho\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

Les hypothèses du théorème de Lions sont réunies, il existe donc une solution unique  $u \in L^2(]0, T[; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  pour le système (5.1). ■

### 5.1.2 Positivité de la solution

Dans cette section, on vérifie que toute solution  $u = u(t, x)$  du système (5.1) est positive.

**Proposition 5.4** *Soit la condition initiale  $u_0 \geq 0$  et  $f$  une fonction dans  $L^2(Q)$  strictement positive sur  $]0, T[ \times \Omega$ . Alors la solution faible  $u$  de (5.1) est positive presque partout pour  $t > 0$ .*

**Preuve** - On note la partie négative de  $u$  par,

$$u^-(t, x) = \begin{cases} -u & \text{si } u < 0, \\ 0 & \text{si } u \geq 0, \end{cases}$$

avec  $u = u^+ - u^-$ . Notre but est de montrer que  $u^-$  est nul.

Comme  $u$  est solution faible du système (5.1) pour presque tout  $t$ , alors elle vérifie pour tout  $\rho \in H_0^1(\Omega)$  l'équation suivante

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \rho \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \rho \, dx = \int_{\Omega} \rho f \, dx.$$

En prenant  $\rho = u^-(t, \cdot)$  pour tout  $t > 0$ , nous obtenons

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} u^- \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u^- \, dx = \int_{\Omega} u^- f \, dx.$$

ce qui se récrit,

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |u^-|^2 \, dx - \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 \, dx = \int_{\Omega} u^- f \, dx.$$

car

$$\left| \frac{\partial u^+}{\partial t} \right| u^- = (\nabla u^+) u^- = 0.$$

On en déduit, alors

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |u^-|^2 \, dx = \int_{\Omega} u^- f \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 \, dx \geq 0$$

En intégrant en temps, nous obtenons

$$\int_{\Omega} |u^-(t, x)|^2 \, dx \leq \int_{\Omega} |u^-(0, x)|^2 \, dx = 0$$

car  $u_0 \geq 0$ , Donc  $u^-(t, x) = 0$ . ■

## 5.2 Sentinelle approchée pour les problèmes de diffusion avec pollution

Dans cette section, nous abordons le problème de l'identification des termes de pollution et/ou des termes manquants qui se trouvent dans les problèmes liés à l'écologie comme la diffusion de la pollution dans une rivière ou un estuaire. Dans ces problèmes, on ne connaît qu'incomplètement les données initiales (instant du début de la pollution). La pollution se présente comme terme source dont on connaît la position et la nature mais pas l'amplitude [14]. Notre but est d'avoir des informations sur ces amplitudes indépendamment des données initiales manquantes.

Les problèmes étudiés ici sont aussi présents dans diverses disciplines d'origines variées telles que la physique ou la médecine ou encore l'économie (J.-P. Kernevez [14]).

Notre approche utilise une variante de la méthode des moindres carrés, mieux adaptée pour répondre aux questions que nous nous posons. C'est la méthode des sentinelles due à J.-L. Lions [18] dans les années 1990.

Nous allons étudier l'existence et la construction d'une sentinelle dite "approchée" pour une observation sans bruit.

Le problème de construction d'une telle sentinelle est équivalente à un problème de contrôlabilité approchée à zéro, que nous obtenons par une méthode variationnelle.

### 5.2.1 Description du problème

La diffusion de pollution dans une rivière ou un estuaire est modélisée par un problème aux limites pour une équation de la chaleur dans un domaine ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$  dans les applications) de frontière régulière  $\Gamma$ ,

durant un temps  $T$ . Plus précisément, nous considérons le système dissipatif à données manquantes suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u &= \xi + \lambda \widehat{\xi} & \text{dans } Q := ]0, T[ \times \Omega, \\ u(0) &= u_0 + \tau \widehat{u}_0 & \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur } \Sigma := ]0, T[ \times \Gamma, \end{cases} \quad (5.6)$$

où  $\mathcal{L}$  est l'opérateur de diffusion pour l'équation de la chaleur:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$$

Avec  $\xi$  et  $u_0$  sont des fonctions connues,  $\xi \in L^2(Q)$ ,  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $\lambda$  et  $\tau$  des réels assez petits,  $\lambda \widehat{\xi}$  et  $\tau \widehat{u}_0$  sont des fonctions inconnues appelées termes de pollution et termes manquants respectivement, tel que :

$$\|\widehat{\xi}\|_{L^2(Q)} \leq 1 \quad \text{and} \quad \|\widehat{u}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1.$$

Le problème qui se pose est le suivant: *comment obtenir des informations sur  $\lambda \widehat{\xi}$  qui ne soient pas affectées par les variations de la donnée initiale  $u(0)$  autour de  $u_0$ ?*

Bien sûr, pour espérer pouvoir obtenir des informations, il faut observer l'état du système (5.6).

### Observation du système

Soit  $\mathcal{O}$  un sous-ensemble ouvert de  $\Omega$  dit observatoire. Soit  $u_{obs}$  l'unique solution du système (5.6) observée sur  $\mathcal{O}$  pendant un temps  $]0, T[$ . Alors, nous définissons:

$$u_{obs} = m_o \quad \text{dans } ]0, T[ \times \mathcal{O}, \quad (5.7)$$

où  $m_o$  est une mesure connue.



Le problème se précise maintenant: *peut-on obtenir, à partir de la donnée  $m_o$ , des informations sur  $\lambda \hat{\xi}$  qui soient indépendantes des variations de  $u(0)$  autour de  $u_0$ ?*

Pour répondre à cette question, nous allons utiliser la méthode des sentinelles approchées.

### 5.2.2 Sentinelle approchée

Du point de vue théorique, il est important de pouvoir déterminer une sentinelle exacte afin de bien décrire les ensembles atteignables. Toutefois, du point de vue numérique la sentinelle approchée est largement suffisante, car un objectif ne peut pas toujours être atteint exactement, et dans ces cas nous pouvons essayer de s'en approcher le plus possible.

Nous montrons dans cette partie que l'on peut établir la structure des sentinelles approchées pour une observation sans bruit.

Dans ce but, soit  $h_0 \in L^2(]0, T[ \times \mathcal{O})$  tel que  $h_0 \geq 0$ , et tel que  $\omega \subset \mathcal{O} \subset \Omega$  (l'ouvert de contrôle). Alors, pour  $v \in L^2(]0, T[ \times \omega)$ , nous définissons la fonctionnelle:

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \iint_Q (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + v \chi_{\omega}) u(\lambda, \tau) dx dt. \quad (5.8)$$

où l'état

$$u(\lambda, \tau) = u(t, x, \lambda, \tau)$$

**Définition 5.5** *Pour  $\varepsilon > 0$ , on dit que la fonctionnelle  $S$  est une sentinelle approchée si les conditions suivantes sont satisfaites:*

$$\left| \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) \right| \leq \varepsilon, \quad (5.9)$$

et,

$$\|v\|_{L^2(\omega, (0, T))} \text{ le minimum dans } L^2(]0, T[ \times \omega). \quad (5.10)$$

**Remarque 5.6** *La définition précédente est une généralisation de la notion des sentinelles. Effectivement, dans la définition originale de sentinelle de Lions, l'observation  $h_0$  et le contrôle  $v$ , ont leurs supports dans un même ouvert :  $\omega = \mathcal{O}$ . Dans ce cas, l'existence de sentinelle est toujours satisfaite pour  $v = -h_0$  car nous obtenons directement  $\mathcal{S} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau} = 0$ .*

*La condition (5.9) du problème suppose l'existence de la dérivée  $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0)$ .*

### 5.2.3 Equivalence à un problème de contrôlabilité approchée

Dans cette partie, nous montrons que l'existence d'une fonction contrôle  $v$  et donc d'une sentinelle  $\mathcal{S}$  est équivalente à un problème de contrôlabilité approchée à zéro. Tout d'abord, il est facile de vérifier que la condition (5.9) s'écrit:

$$\left| \iint_Q (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + v \chi_{\omega}) u_{\tau} \, dx dt \right| \leq \varepsilon, \quad (5.11)$$

où  $u_{\tau} = \frac{\partial u}{\partial \tau}(0, 0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \frac{u(0, \tau) - u(0, 0)}{\tau} \right)$  est solution du système:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_{\tau} &= 0 & \text{dans } Q, \\ u_{\tau}(0) &= \widehat{u}_0 & \text{dans } \Omega, \\ u_{\tau} &= 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

La proposition suivante montre que le problème d'existence d'une sentinelle est équivalent à un problème de contrôlabilité approchée à zéro.

**Proposition 5.7** Soit  $q := q(t, x; v)$  l'état adjoint solution du problème:

$$\begin{cases} \mathcal{L}^* q &= h_0 \chi_{\mathcal{O}} + v \chi_{\omega} & \text{dans } Q, \\ q(T) &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ q &= 0 & \text{sur } \Sigma, \end{cases} \quad (5.12)$$

avec,

$$\mathcal{L}^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$$

l'opérateur adjoint. Alors, il existe une sentinelle approchée au problème (5.6), si et seulement si, il existe une fonction de contrôle  $v$  de norme minimale telle que pour toute solution  $q$ , nous ayons l'estimation:

$$\|q(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\varepsilon}. \quad (5.13)$$

**Preuve** - Nous multiplions la première équation du système (5.12) par  $u_\tau$  et nous intégrons par parties sur  $Q$ , nous obtenons:

$$\begin{aligned} \iint_Q L^* q u_\tau dxdt &= \iint_Q q L u_\tau dxdt - \int_\Omega q(T) u_\tau(T) dx \\ &+ \int_\Omega q(0) u_\tau(0) dx + \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial u_\tau}{\partial \nu} q d\gamma dt \\ &- \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial q}{\partial \nu} u_\tau d\gamma dt. \end{aligned} \quad (5.14)$$

En utilisant (5.12), nous déduisons:

$$\iint_Q (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + v \chi_{\omega}) u_\tau dxdt = \int_\Omega q(0) u_\tau(0) dx. \quad (5.15)$$

Si la sentinelle approchée existe, cela signifie que:

$$\left| \int_\Omega q(0) \widehat{u}_o dx \right| \leq \varepsilon \quad \forall \widehat{u}_o \in L^2(\Omega),$$

en vertu de (5.11). En particulier, en choisissant  $\widehat{u}^o = q(0)$ , nous obtenons:

$$\|q(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

La réciproque est immédiate. ■

### 5.2.4 Informations fournies par la sentinelle

Un développement au point  $(\lambda, \tau) = (0, 0)$  à l'ordre 1 de la fonctionnelle  $\mathcal{S}$ , donne l'égalité approximative:

$$\mathcal{S}_{obs}(\lambda, \tau) \simeq \mathcal{S}(0, 0) + \lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda}(0, 0) + \tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0),$$

ce qui est équivalent à,

$$\iint_Q (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + v \chi_{\omega})(m_o - u(0, 0)) \, dxdt \simeq \lambda \iint_Q (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + v \chi_{\omega}) u_{\lambda} \, dxdt + \tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0)$$

avec  $u_{\lambda} = \frac{\partial u}{\partial \lambda}(0, 0)$  solution de :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_{\lambda} &= \widehat{\xi} \text{ dans } Q, \\ u_{\lambda}(0) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_{\lambda} &= 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

D'autre part, nous multiplions (5.12) par  $u_{\lambda}$  et nous intégrons par parties sur  $Q = ]0, T[ \times \Omega$ , nous obtenons:

$$\iint_Q (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + v \chi_{\omega}) u_{\lambda} \, dxdt = \iint_Q q \widehat{\xi} \, dxdt.$$

Donc,

$$\iint_Q (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + v \chi_{\omega})(m_o - u(0, 0)) \, dxdt - \lambda \iint_Q q \widehat{\xi} \, dxdt \simeq \tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0).$$

Nous obtenons alors le résultat suivant :

$$\left| \iint_Q (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + v \chi_{\omega})(m_o - u(0, 0)) \, dxdt - \lambda \iint_Q q \widehat{\xi} \, dxdt \right| \leq |\tau| \varepsilon. \quad (5.16)$$

Ainsi, la connaissance du contrôle  $v$  nous fournit des informations *approchées* sur le terme de pollution  $\lambda \widehat{\xi}$ . Si nous faisons tendre  $\varepsilon$  vers zéro dans (5.16), nous obtenons.

$$\langle q, \lambda \widehat{\xi} \rangle_{L^2(Q)} = \iint_Q (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + v \chi_{\omega})(m_o - u(0, 0)) \, dxdt.$$

### 5.3 Existence d'une sentinelle approchée

Nous rappelons que le problème d'existence d'une sentinelle approchée est équivalent à un problème de contrôlabilité approchée à zéro.

Notre objectif est de prouver que la solution du problème de contrôlabilité à zéro (5.12)-(5.13) est équivalent à montrer que:

$$R(0) = \left\{ q(0) \text{ tel que } q(t, x; v) \text{ est solution de (5.12)-(5.13),} \right. \\ \left. v \in L^2(]0, T[ \times \omega) \right\}$$

est dense dans  $L^2(\Omega)$  (voir Zuazua [35] par exemple). Plus précisément, nous montrons la proposition suivante

**Proposition 5.8** *Soit  $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$  tel que*

$$\langle q(0), \varphi_0 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall v \in L^2(]0, T[ \times \omega). \quad (5.17)$$

*Alors, on a  $\varphi_0 \in \{0\}$ .*

**Preuve** - Il est clair que  $R(0)$  est un sous-espace vectoriel de  $L^2(\Omega)$ , il sera dense dans  $L^2(\Omega)$  si et seulement si son orthogonal dans  $L^2(\Omega)$  est réduit à zéro.

Comme  $\{0\} \subset R(0)^\perp$ , il reste à montrer que  $R(0)^\perp \subset \{0\}$ .

Soit donc  $\varphi_0 \in R(0)^\perp$ . Résolvons le problème suivant:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi &= 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi(0) &= \varphi_0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi &= 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (5.18)$$

qui possède une solution unique  $\varphi \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  (Cf. livre de Lions et Magenes [19]).

Multiplions maintenant la première équation du système (5.12) par  $\varphi$ . Après

intégration par parties sur  $Q$ , il vient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + v \chi_{\omega}) \varphi \, dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} (L^* q) \varphi \, dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} q L \varphi \, dx dt - \int_{\Omega} (q(T) \varphi(T) - q(0) \varphi(0)) \, dx \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} q \, d\gamma dt - \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial q}{\partial \nu} \varphi \, d\gamma dt. \end{aligned}$$

Comme  $q$  et  $\varphi$  sont solutions de (5.12) et de (5.18) respectivement, nous obtenons

$$\iint_Q (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + v \chi_{\omega}) \varphi \, dx dt = \int_{\Omega} q(0) \varphi_0 \, dx, \quad \forall v \in L^2(]0, T[ \times \omega).$$

Or,  $\varphi(0) = \varphi_0 \in R(0)^\perp$  et  $q(0) \in R(0)$ , donc, nous déduisons que

$$\iint_Q (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + v \chi_{\omega}) \varphi \, dx dt = 0, \quad \forall v \in L^2(]0, T[ \times \omega).$$

Comme  $v \chi_{\omega} + h_0 \chi_{\mathcal{O}} \neq 0$  pour tout  $v \in L^2(]0, T[ \times \omega)$ , on en déduit que  $\varphi \equiv 0$  dans  $]0, T[ \times \omega \subset Q$ . D'après la propriété de continuation unique de Mizohata [23], nous obtenons

$$\varphi = 0 \text{ dans } Q.$$

Par conséquent,  $\varphi^o = 0$  ce qui montre que  $R(0)^\perp = \{0\}$ . ■

**Remarque 5.9** *L'ensemble  $R(0)$  est un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert  $L^2(\Omega)$ . Ainsi  $R(0)$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ , si et seulement si,  $R(0)^\perp = \{0\}$ . Par conséquent, la proposition 5.8 montre bien qu'il existe un contrôle  $v \in L^2(]0, T[ \times \omega)$  tel que la solution  $q$  de (5.12) satisfait à (5.13).*

**Remarque 5.10** *La propriété de continuation unique de Mizohata est déduite de l'inégalité d'observabilité suivante:*

$$\iint_Q \frac{1}{\theta^2} |\varphi|^2 \, dx dt \leq C \left[ \iint_Q \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi \right|^2 \, dx dt + \int_0^T \int_{\omega} |\varphi|^2 \, dx dt \right], \quad (5.19)$$

où  $\varphi$  est solution du système (5.18) et  $\theta \in C^2(Q)$  est une fonction positive avec  $\frac{1}{\theta}$  bornée.

### 5.3.1 Existence du contrôle optimal

Nous rappelons que le problème de l'existence d'une sentinelle approchée (Cf. Proposition 5.7) se ramène à l'étude d'un problème d'optimisation sous contraintes de l'équation de la chaleur de la forme :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min \|v\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \\ (v, q) \in \mathcal{M} \end{cases},$$

où,

$$\mathcal{M} = \left\{ (v, q) \left/ \begin{array}{ll} L^*q = h_o\chi_{\mathcal{O}} + v\chi_{\omega} & \text{dans } Q \\ q(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \text{ avec } \|q(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\varepsilon} \right\}.$$

**Remarque 5.11** *Il va bien sûr exister plusieurs contrôles  $v$  ayant la même propriété (5.13) (i.e.  $(v, q) \in \mathcal{M}$ ). Mais afin de pouvoir assurer l'existence d'une sentinelle, il est nécessaire de sélectionner un contrôle de norme minimale.*

La proposition suivante montre l'existence du contrôle optimal pour  $(\mathcal{P})$ , ce qui signifie encore l'existence de la sentinelle approchée pour une observation sans bruit.

**Proposition 5.12** *Le problème  $(\mathcal{P})$  admet une unique solution  $(v_\varepsilon, q_\varepsilon)$ .*

**Preuve** - En effet, de la proposition 5.8, on déduit que le domaine  $\mathcal{M}$  est non vide fermé. D'autre part, l'application :  $v \mapsto \|v\|_{L^2(]0, T[ \times \omega)}$  est continue, coercive et strictement convexe.

Alors, il existe une unique solution pour le problème  $(\mathcal{P})$  que nous noterons  $(v_\varepsilon, q_\varepsilon) \in \mathcal{M}$  et qui vérifie:

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq \|v\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \quad \forall (v, q) \in \mathcal{M}.$$

■

### 5.3.2 Construction d'une sentinelle approchée

Dans cette section, nous cherchons à caractériser le contrôle optimal en utilisant un résultat de dualité de Fenchel-Rockafellar .

Soit alors  $\varphi^o \in L^2(\Omega)$  et  $\varphi$  solution de (5.18) associée. Nous introduisons maintenant la fonctionnelle  $J_\varepsilon$  définie par:

$$J_\varepsilon(\varphi^o) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 dxdt + \varepsilon \|\varphi^o\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega \varphi h_o \chi_O dxdt.$$

Et nous considérons le problème sans contraintes suivant:

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \begin{cases} \min J_\varepsilon(\varphi^o), \\ \varphi^o \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Alors, nous avons la proposition:

**Proposition 5.13** *La fonctionnelle  $J_\varepsilon$  est coercive.*

**Preuve** - Pour prouver que  $J_\varepsilon$  est coercive, il suffit de montrer l'inégalité suivante:

$$\lim_{\|\varphi^o\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty} \inf \frac{J_\varepsilon(\varphi^o)}{\|\varphi^o\|_{L^2(\Omega)}} \geq \varepsilon. \quad (5.20)$$

On procède comme dans [35]. Soit donc  $(\varphi_j^o) \subset L^2(\Omega)$  une suite de données initiales du système (5.18) avec  $\|\varphi_j^o\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty$ . Posons

$$\tilde{\varphi}_j^o = \frac{\varphi_j^o}{\|\varphi_j^o\|_{L^2(\Omega)}},$$



pour normaliser à  $\|\tilde{\varphi}_j^o\|_{L^2(\Omega)} = 1$ .

Par ailleurs, soit  $\tilde{\varphi}_j$  la solution de (5.18) avec la donnée initiale  $\tilde{\varphi}_j^o$ . Alors, nous avons:

$$\frac{J_\varepsilon(\varphi_j^o)}{\|\varphi_j^o\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{1}{2} \|\varphi_j^o\|_{L^2(\Omega)} \int_0^T \int_\omega |\tilde{\varphi}_j|^2 dxdt + \varepsilon \|\tilde{\varphi}_j^o\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega \tilde{\varphi}_j h_o \chi_{\mathcal{O}} dxdt.$$

Deux cas peuvent se produire. Le premier est le suivant:

$$\liminf \int_0^T \int_\omega |\tilde{\varphi}_j|^2 dxdt > 0.$$

Mais dans ce cas, nous avons:

$$\int_0^T \int_\Omega \tilde{\varphi}_j h_o \chi_{\mathcal{O}} dxdt \geq - \left| \int_0^T \int_\Omega \tilde{\varphi}_j h_o \chi_{\mathcal{O}} dxdt \right|$$

Par application de l'inégalité Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\int_0^T \int_\Omega \tilde{\varphi}_j h_o \chi_{\mathcal{O}} dxdt \geq -C \left( \int_0^T \int_\Omega |\tilde{\varphi}_j|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \int_\Omega |h_o \chi_{\mathcal{O}}|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'autre part, l'inégalité de Carleman (5.21) donne:

$$-\left( \int_Q |\varphi_j|^2 dxdt \right) \geq -C \left[ \int_0^T \int_\omega |\varphi_j|^2 dxdt \right], \quad (5.21)$$

par conséquent:

$$\inf \frac{J_\varepsilon(\varphi^o)}{\|\varphi^o\|_{L^2(\Omega)}} \geq \inf \left[ \varepsilon + \left( \frac{1}{2} \|\varphi_j^o\|_{L^2(\Omega)} - C \right) \left( \int_0^T \int_\omega |\tilde{\varphi}_j|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Donc,

$$\liminf_{\|\varphi_j^o\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty} \frac{J_\varepsilon(\varphi_j^o)}{\|\varphi_j^o\|_{L^2(\Omega)}} = \infty.$$

Le second cas est le suivant:

$$\liminf \int_0^T \int_\omega |\tilde{\varphi}_j|^2 dxdt = 0.$$

Dans ce cas, comme  $(\tilde{\varphi}_j^o)_j$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ , nous pouvons extraire une sous suite  $(\tilde{\varphi}_j^o)_j$  telle que:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_j^o \rightharpoonup \eta_0^o \text{ converges faiblement dans } L^2(\Omega), \\ \tilde{\varphi}_j \rightharpoonup \psi \text{ converges faiblement dans } L^2(]0, T[; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \end{cases}$$

où  $\psi$  est solution de (5.18) avec la donnée initiale  $\psi^o$ . De plus, par la semi-continuité inférieure, il vient:

$$\int_0^T \int_{\omega} |\psi|^2 dxdt \leq \liminf \int_0^T \int_{\omega} |\tilde{\varphi}_j|^2 dxdt = 0.$$

Par conséquent,

$$\psi = 0 \text{ dans } \omega \times (0, T),$$

Par l'application de la propriété de continuation unique de Mizohata [23], nous obtenons:

$$\psi = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T).$$

Ainsi,

$$\tilde{\varphi}_j \rightharpoonup 0 \text{ converge faiblement dans } L^2(]0, T[; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Or,

$$\liminf \frac{J_{\varepsilon}(\varphi^o)}{\|\varphi^o\|_{L^2(\Omega)}} \geq \liminf \left[ \varepsilon + \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\varphi}_j h_o \chi_{\mathcal{O}} dxdt \right]$$

Donc,

$$\liminf \frac{J_{\varepsilon}(\varphi^o)}{\|\varphi^o\|_{L^2(\Omega)}} \geq \varepsilon.$$

D'où la relation (5.20) est satisfaite. ■

**Proposition 5.14** *Le problème  $(\mathcal{P}_{\varepsilon})$  admet une solution unique  $\hat{\varphi}^o \in L^2(\Omega)$ . De plus, si  $\hat{\varphi}$  est solution de (5.18) associée à  $\hat{\varphi}^o$  alors  $(\hat{v} = \hat{\varphi}\chi_{\omega}, q)$  est solution de  $(\mathcal{P})$ .*

**Preuve** - La fonctionnelle  $J_\varepsilon$  étant continue, convexe et coercive sur  $L^2(\Omega)$ , le problème  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$  admet une solution unique  $\widehat{\varphi}^\circ$  dans  $L^2(\Omega)$ . Montrons maintenant que  $(\widehat{v} = \widehat{\varphi}\chi_\omega, q)$  est solution de  $(\mathcal{P})$ .

Comme  $J_\varepsilon$  atteint sa valeur minimale à  $\widehat{\varphi}^\circ \in L^2(\Omega)$ . Alors pour tout  $\psi^\circ \in L^2(\Omega)$  et pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , nous avons:

$$J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^\circ) \leq J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^\circ + s\psi^\circ). \quad (5.22)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^\circ + s\psi^\circ) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |\widehat{\varphi} + s\psi|^2 dxdt + \varepsilon \|\widehat{\varphi}^\circ + s\psi^\circ\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \int_0^T \int_\Omega (\widehat{\varphi} + s\psi) h_o \chi_O dxdt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |\widehat{\varphi}|^2 dxdt + \frac{s^2}{2} \int_0^T \int_\omega |\psi|^2 dxdt \\ &\quad + s \int_0^T \int_\omega \widehat{\varphi} \psi dxdt + \varepsilon \|\widehat{\varphi}^\circ + s\psi^\circ\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \int_0^T \int_\Omega (\widehat{\varphi} + s\psi) h_o \chi_O dxdt. \end{aligned}$$

En reportant (5.3.2) dans (5.22) et après simplification, nous trouvons:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varepsilon \left[ \|\widehat{\varphi}^\circ + s\psi^\circ\|_{L^2(\Omega)} - \|\widehat{\varphi}^\circ\|_{L^2(\Omega)} \right] + \frac{s^2}{2} \int_0^T \int_\omega |\psi|^2 dxdt \\ &\quad + s \left[ \int_0^T \int_\omega \widehat{\varphi} \psi dxdt + \int_0^T \int_\Omega \psi h_o \chi_O dxdt \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

D'autre part,

$$\|\widehat{\varphi}^\circ + s\psi^\circ\|_{L^2(\Omega)} - \|\widehat{\varphi}^\circ\|_{L^2(\Omega)} \leq |s| \|\psi^\circ\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.24)$$

De (5.23) et (5.24), il vient

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varepsilon |s| \|\psi^\circ\|_{L^2(\Omega)} + \frac{s^2}{2} \int_0^T \int_\omega |\psi|^2 dxdt \\ &\quad + s \left[ \int_0^T \int_\omega \widehat{\varphi} \psi dxdt + \int_0^T \int_\Omega \psi h_o \chi_O dxdt \right], \end{aligned}$$

pour tous  $\psi^o \in L^2(\Omega)$  et  $s \in \mathbb{R}$ .

En divisant par  $s > 0$  et par passage à la limite pour  $s \rightarrow 0$ , nous obtenons:

$$0 \leq \varepsilon \|\psi^o\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_{\omega} \widehat{\varphi} \psi dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \psi h_o \chi_{\mathcal{O}} dx dt.$$

Les mêmes calculs que précédemment avec  $s < 0$  donnent:

$$\left| \int_0^T \int_{\omega} \widehat{\varphi} \psi dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \psi h_o \chi_{\mathcal{O}} dx dt \right| \leq \varepsilon \|\psi^o\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \psi^o \in L^2(\Omega).$$

D'autre part, si nous prenons  $v = \widehat{\varphi} \chi_{\omega}$ , et si nous multiplions la première équation du système (5.12) par  $\psi$ , solution de (5.18), et nous intégrons par parties sur  $Q$ , nous obtenons:

$$\int_{\Omega} q(0) \psi^o dx = \int_0^T \int_{\Omega} \psi h_o \chi_{\mathcal{O}} dx dt + \int_0^T \int_{\omega} \widehat{\varphi} \psi dx dt.$$

Il vient des deux dernières relations :

$$\left| \int_{\Omega} q(0) \psi^o dx \right| \leq \varepsilon \|\psi^o\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \psi^o \in L^2(\Omega).$$

Ce qui implique que

$$\|q(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

■

**Remarque 5.15** *En conséquence de ce qui précède, la sentinelle approchée pour une observation sans bruit est bien construite et elle est définie par la formule:*

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \int_0^T \int_{\Omega} (h_o \chi_{\mathcal{O}} + \widehat{\varphi} \chi_{\omega}) y(\lambda, \tau) dx dt,$$

où  $\widehat{\varphi}$  est solution de (5.18).

# Chapitre 6

## Conclusion et perspectives

Comme nous l'avons vu tout au long de cette thèse, les problèmes de détection de pollution liés à l'écologie et, par conséquent, celui de la recherche d'une sentinelle, à partir d'une observation sans bruit <sup>1</sup>, est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro. L'outil le plus utilisé pour résoudre ces problèmes de contrôlabilité, est l'inégalité d'observabilité basée sur les inégalités de Carleman <sup>2</sup>.

Au chapitre 2, nous avons analysé le phénomène de transfert et d'absorption de nutriments, par la racine d'une plante dans un sol pollué. En général ce modèle correspond à un système d'advection-diffusion pour le quel nous avons démontré l'existence d'une solution unique dans l'espace de fonction  $L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ , en utilisant le théorème de J.-L.Lions (voir [2] et [6]).

---

<sup>1</sup>La solution du système observé est égale à une mesure donnée  $m_0$ .

<sup>2</sup>C'est la méthode H.U.M (Hilbert Uniqueness Method) la plus utilisée par Lions pour les problèmes paraboliques, mais aussi les problèmes hyperboliques qui sont régis par l'équation des ondes.

Par la suite, nous avons utilisé, les techniques de Fursikov et Imanuvilov [9] pour établir nos propres inégalités de Carleman qui nous ont permis de donner une inégalité d’observabilité et de montrer la contrôlabilité à zéro et caractériser le contrôle optimal dans le chapitre 3.

A la fin, nous avons proposé une sentinelle approchée pour étudier le phénomène de diffusion de pollution dans un estuaire. Ce concept de sentinelle qui permet de détecter la pollution à  $\varepsilon$ -près, fait appel aux techniques d’analyse variationnelle pour obtenir la contrôlabilité approchée à zéro et déterminer le contrôle optimal.

En perspective, il serait utile de faire ressortir quelques questions susceptibles de constituer des problèmes ouverts pour la problématique que nous avons abordée:

- Tout d’abord, il convient la méthode des sentinelles discriminantes dans le cas exact pour le modèle de transfert sol-plante avec pollution [24]. Ici, nous nous plaçons dans le cas d’une observation bruitée, c’est à dire dans le cas où la solution du système observé est de la forme suivante :

$$c_{obs} = m_o + \sum_{i=1}^M \beta_i m_i,$$

les fonctions  $m_i$  sont des mesures connues et les  $\beta_i$  sont des réels qui ne sont pas connus. Les termes  $\beta_i m_i$  sont appelés termes de bruit. Cette structure conduit automatiquement à un problème de contrôlabilité approchée avec contraintes sur le contrôle.

- Il serait également utile d’étudier le contrôle optimal dans le cas approché pour le modèle de diffusion de pollution, en utilisant la méthode

des sentinelles discriminantes.

Les méthodes d'analyse et de contrôle menées ici doivent être validées par un traitement numérique.





# Bibliographie

- [1] B.-E. AINSEBA, J.-P. KERNEVEZ, R. LUCE. Application des sentinelles à l'identification des pollutions dans une rivière, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M2AN)*, Vol. 28, **3**, pp 297–312 (1994).
- [2] G. ALLAIRE. *Analyse numérique et optimisation*, Les Editions de l'Ecole Polytechnique (2012).
- [3] J.-P. AUBIN. Un théorème de compacité. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 256, pp 5042–5044 (1963).
- [4] S.-A. BARBER. *Soil nutrient bioavailability : a mechanistic approach*, 2nd Ed. John Wiley and Sons, New-York, NY (1995).
- [5] O. BODART, C. FABRE. Contrôle insensibilisant la norme de la solution d'une équation de la chaleur semi-linéaire, *C.R. Acad. Sci., Série I*, 316(8), pp 789–794 (1993).
- [6] H. BRÉZIS. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise*, Paris, Masson (1983).
- [7] M. COMTE, J.-M. CORON, S. GUERRERO, P.-H. TOURNIER. Analysis of model of phosphorus uptake by plants roots, *Journal of Evolution Equations*, 13, pp 595–615 (2013).

- [8] C. FABRE, J.-P. PUEL, E. ZUAZUA. Approximate controllability of the semilinear heat equation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 125 A pp 31–61 (1995)
- [9] A. FURSIKOV, O.-YU. IMANUVILOV. Controllability of evolution equations. Lecture notes, Research Institute of Mathematics, Seoul National University, Korea (1996).
- [10] S. GUERRERO, E. FERNÁNDEZ-CARA. Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability. *SIAM J. Control OPTIM.*, 45(4), pp 1395–1446 (2006).
- [11] S. GUERRERO, E. FERNÁNDEZ-CARA, M. GONZALEZ-BURGOS, J.-P. PUEL. Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions the linear case. *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 12 pp 442–465 (2006).
- [12] YU.-S.E. IMANUVILOV. Controllability of parabolic equations. *Sbornik Mathematics* 186, 6, pp 879–900 (1995).
- [13] O.-YU. IMANUVILOV, M. YAMAMOTO. Carleman estimate for a parabolic equation in a Sobolev space of negative order and its applications, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 218, Dekker, New York, pp 113–137 (2001).
- [14] J.-P. KERNEVEZ. *The Sentinel Method and Its Application to Environmental Pollution Problems*, CRC Press (1997).
- [15] G. LEBEAU, L. ROBBIANO. Contrôle exacte de l'équation de la chaleur, *Comm. P.D.E.*, 20, pp 335–356 (1995).

- [16] J. LEBLOND, J.-P. MARMORAT, J.-R. PARTINGION. Analytic approximation with real constraints with applications to inverse diffusion problems, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 16, pp 89–105 (2008).
- [17] J.-L. LIONS. Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués vol. 1, Masson, Paris (1988).
- [18] J.-L. LIONS. Sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes, *Recherches en mathématiques appliquées RMA N° 21*, Masson (1992).
- [19] J.-L. LIONS, E. MAGENES. Problèmes aux limites non homogènes et applications vol. 1 & 2, Masson (1970).
- [20] L. LOUISON, A. OMRANE. Modeling plant nutrient uptake : Mathematical analysis and Optimal control, *Evolution Equations and Control Theory*, Vol.4, N°2, pp 193–203 (2015).
- [21] Y. MILOUDI, O. NAKOULIMA, A. OMRANE. A method of detection of pollution in distributed systems of incomplete data, *ESAIM : Proceedings, Control, Set-Valued Analysis and Application*, Vol. 2006, pp 1–15 (2006).
- [22] Y. MILOUDI, O. NAKOULIMA, A. OMRANE. Instantaneous sentinels for problems of incomplete data, *Inverse Problems in Science and Engineering*, Vol. 17, 4, pp. 451 – 459 (2009).
- [23] Z. MIZOHATA. Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, *Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Série A*, 31, pp 219–239 (1958).
- [24] O. NAKOULIMA. Contrôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 339, pp 405–410 (2004).

- [25] O. NAKOULIMA. Optimal control for distributed systems subject to nullcontrollability. Application to discriminating sentinels. ESAIM : COCV, 13(4), 623–638 (2007).
- [26] O. NAKOULIMA. A revision of J. L. Lions’ notion of sentinels. Portugaliae Mathematica. Portugal . Math. Vol. 65, Fasc. 1, pp 1–22 (2008).
- [27] P.-H. NYE. The effect of the nutrient intensity and buffering power of a soil, and the absorbing power, size and root hairs of a root, on nutrient absorption by diffusion, Plant and Soil, 25, pp 81–105 (1966).
- [28] P.-B. TINKER, P.-H. NYE. Solute movement in the rhizosphere, Oxford University (2000).
- [29] P.-H. NYE , F.-H.-C. MARRIOTT. A theoretical study of the distribution of substances around roots resulting from simultaneous diffusion and mass flow, Plant and Soil, 3, pp 459–472 (1969).
- [30] J.-P. PUEL. Applications of global Carleman inequalities to controllability and inverse problems. Textos de Metodos Matematicos de l’Instituto de Matematica de l’UFRJ, (2008).
- [31] A. OMRANE. Some aspects of the sentinel method for pollution problems, Air Quality - Monitoring and Modeling, In TechOpen, DOI. 10.5772/33173, Chap 9, pp 185–204 (2012).
- [32] T.ROOSE. Mathematical Model of Plant Nutrient Uptake, Linacre College, University of Oxford (2000).
- [33] T. ROOSE, A.-C. FOWLER, P.-R .DARRAH. A mathematical model of plant nutrient uptake, J. Math. Biol 42, pp 347–360 (2001).

- [34] F. SEGUENI, M.-H. MORTAD, A. OMRANE . Approximate sentinels for diffusion phenomena with pollution. *Math. Slovaca* 68, No. 5, pp 1065–1074 (2018).
- [35] E. ZUAZUA. Finite dimensional null-controllability for the semilinear heat equation. *J. Math. Pures Appl.* 76, pp 570–594 (1997).

## Résumé

Dans la modélisation des phénomènes écologiques et environnementaux, certains paramètres (biologiques, climatiques, etc.) ne sont pas bien connus ou complètement inconnus, ce qui nous mène à étudier des problèmes à données manquantes. Le but recherché dans cette thèse est l'identification des paramètres de pollution de deux problèmes inverses spatiotemporels à données initiales incomplètes, à partir d'une observation sans bruit, et en utilisant la méthode des sentinelles introduite par J.-L. Lions (1992). Le premier problème abordé est un système d'advection-diffusion avec condition au bord de type Robin, modélisant l'absorption de nutriments, par la racine d'une plante dans un sol pollué. Nous démontrons tout d'abord l'existence et l'unicité de la solution pour ce système, ensuite, nous étudions le problème de contrôlabilité exacte à zéro pour la construction et la détermination d'une sentinelle. Aussi, nous caractérisons à l'aide des inégalités de Carleman obtenues, le contrôle optimal. Le second problème étudié est une équation de la chaleur décrivant la diffusion de pollution dans un estuaire. Nous montrons que la question d'existence d'une sentinelle insensible à la condition initiale est équivalente à un problème de contrôlabilité approchée à zéro, nous déterminons également le contrôle optimal pour lequel nous présentons une méthode variationnelle.

### Mots clés :

Sentinelles; Système d'advection-diffusion; Equation de la chaleur; Existence; Unicité; Inégalités de Carleman; Inégalité d'observabilité; Pollution; Contrôlabilité à zéro; Contrôle optimal.