

FSEA .../Année : 2019

THÈSE

En vue de l'obtention du diplôme

de Doctorat en Sciences

Spécialité : : Mathématiques Appliquées et Computationnelles

Présentée par : **Mohamed ZELLAL**

Algorithme de résolution d'équations différentielles et aux dérivées partielles

Soutenue publiquement le 23/04 / 2019 devant le jury composé de :

Moussadek REMILI	Pr. Univ. Oran1	Président
Fatima BOUDAUD	Pr. Univ. Oran1	Examinatrice
Djilali BEHLOUL	Pr. USTHB. Alger	Examinateur
Ali HAKEM	Pr. Univ. Djillali Liabes SBA	Examinateur
Abbes BENAÏSSA	Pr. Univ. Djillali Liabes SBA	Examinateur
Kacem BELGHABA	Pr. Univ. Oran1	Directeur de Thèse
Lekhmissi BELAÏB	Pr. Univ.Oran1	Invité

Remerciements

C'est une habitude saine de remercier au début d'un tel travail tous ceux qui, plus ou moins directement, ont contribué à le rendre possible. Je désire exprimer ma gratitude à Monsieur Kacem BELGHABA professeur à l'université Oran1, mon directeur de thèse pour avoir accepté d'être mon guide tout au long de ce parcours. Je lui suis reconnaissant de m'avoir aidé à clarifier et à le mettre sous la forme de ce manuscrit. Je n'oublie pas ici de dédier cette thèse à la mémoire du professeur Abdelkader BOUHASSOUN. Je tiens à remercier vivement Monsieur Moussadek REMILI professeur à l'université Oran1, Ahmed Ben Bella d'avoir accepté de présider ce jury.

Mes remerciements vont aussi à Madame et Messieurs :

Fatima BOUDAUD, professeur à l'université Oran1

Djilali BEHLOUL, professeur à USTHB (Alger)

Abbes BENAÏSSA, professeur à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes

Ali HAKEM, professeur à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes pour avoir accepté de faire partie de mon jury. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont accepté de juger ce travail. Je remercie notre invité Lekhmissi BELAÏB, professeur à l'université Oran1, pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Merci en particulier à Youcef BALGAÏD maître assistant à l'université de Chlef pour le traitement de texte LaTeX.

Un très grand merci à ma famille : Mes parents, mes frères et mes soeurs, ma femme et mes enfants pour leurs soutiens et leurs encouragements. J'adresse également mes remerciements à mes amis et mes collègues pour leurs soutiens.

Dédicaces

Cette thèse est dédiée :

À mes chers parents.
À ma famille.
À mes soeurs et mes frères.
À mon épouse et mes enfants.
À mes amis.

Mohamed Zellal

Résumé

Ces dernières années, les méthodes (VIM), (HPM), (HPTM) et (VIMHP), ont reçu une attention considérable, comme étant des méthodes modernes et efficaces pour résoudre différents modèles d'équations différentielles linéaires et non linéaires. Pour cette raison, cette thèse a principalement pour objet d'étudier les applications des méthodes (VIM), (HPM), (HPTM) et (VIMHP), dans le domaine des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles telles les équations de Burgers, de la chaleur, des ondes, du problème de diffusion de la réaction de Cauchy, de Klein-Gordon, de Newell-Whitehead-Segel puis celles de Navier-Stokes pour terminer finalement avec le modèle de population biologique.

In recent years, the methods (VIM), (HPM), (HPTM) and (VIMHP), have received considerable attention, as being modern and efficient methods for solving different models of linear and nonlinear differential equations. For this reason, this thesis mainly aims at studying the applications of methods (VIM), (HPM), (HPTM) and (VIMHP), in the field of ordinary differential equations and partial differential equations such as the Burgers equations, heat, waves, diffusion problem of the Cauchy, Klein-Gordon, Newell-Whitehead-Segel reaction and those of Navier-Stokes for finally finish with the biological population model.

في السنوات الأخيرة، حظيت الطرق (VIM)، (HPM)، (HPTM) و (VIMHP) باهتمام كبير، كطرق حديثة وفعالة لحل نماذج مختلفة من المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية، لهذا السبب، كانت هذه الرسالة موضوع دراسة تطبيق (VIM)، (HPM)، (HPTM) و (VIMHP)، في مجال المعادلات التفاضلية العادية والجزئية مثل معادلة برغر، الحرارة و الموجة، و مشكلة انتشار تفاعل كوشي و معادلات كلاين - جوردون. معادلة نوال و آيتهد سيجل، ثم نافي ستوكس و نختم أخيراً بنموذج السكان البيولوجي.

Keywords :

Variational iteration method ; Homotopy perturbation method ; He's polynomials ; Laplace Transformation ; Newell- Whitehead-Segel equation ; Navier-Stokes equation ; Biological population equation ; Exact solution ; Approximate solution.

Table des matières

Liste des tableaux et figures	6
Introduction	8
1 Méthode d'Itération Variationnelle (VIM)	14
1.1 Description de la méthode (VIM)	14
1.2 Convergence de la méthode (VIM)	15
1.3 Application de la méthode (VIM) pour les équations différentielles ordinaires.	16
1.3.1 Equation différentielle ordinaire linéaire de premier ordre	16
1.3.2 Equation différentielle ordinaire linéaire du second ordre	20
1.3.3 Equation différentielle ordinaire linéaire du troisième ordre	23
1.3.4 Equation de Riccati	27
1.4 Application de la méthode (VIM) pour les équations aux dérivées partielles	28
1.4.1 Equation de KDV	28
1.5 Application de la méthode (VIM) pour un système différentiel	30
1.6 Application de la méthode (VIM) pour l'équation de Burgers	33
1.7 Application de la méthode (VIM) pour l'équation de la chaleur et l'équation des ondes	35
1.7.1 Equation de la chaleur	35
1.7.2 Equation des ondes	37
2 Méthode de perturbation homotopique (HPM)	40
2.1 Idées de base de la méthode (HPM)	40
2.2 Exemples de calcul des polynômes de He	41

TABLE DES MATIÈRES

2.3	Convergence	44
2.4	Application de la méthode (HPM) pour le problème de diffusion de la réaction de Cauchy	46
2.4.1	Solutions par la méthode (HPM)	47
2.4.2	Exemples illustratifs	48
2.5	Application de la méthode (HPM) aux équations de Klein – Gordon	51
2.5.1	Exemples illustratifs	51
3	Equations de Newell-Whitehead- Segel par la méthode (HPTM)	55
3.1	Introduction	55
3.2	Analyse de la méthode de transformation de perturbation homo- topique (HPTM)	56
3.3	Résultats numériques	58
3.4	Conclusion	68
4	Equations à plusieurs dimensions de Navier Stokes. Solutions exactes et numériques par la méthode (HPTM)	69
4.1	Introduction	69
4.2	Exemples illustratifs	70
4.3	Conclusion	80
5	Algorithme précis (VIMHP) pour le modèle de population biologique	82
5.1	Introduction	82
5.2	Description des méthodes numériques	83
5.2.1	Méthode d’itération variationnelle à l’aide des polynômes de He	83
5.3	Résultats numériques	84
5.4	Conclusion	93
	Conclusion Générale	95
	Annexe	97
	Bibliographie	101

Liste des tableaux et figures

Liste des tableaux

Tableaux	Titre	Page
Tableau 3.1	Comparaison entre la solution exacte et ψ_4 pour $t = 0.01$ dans l'exemple 3.3	62
Tableau 3.2	Erreur absolue $ u - \psi_4 $ pour l'exemple 3.4	65
Tableau 3.3	Comparaison de la solution exacte et de ψ_4 pour des temps différents lorsque $x = 1$ dans l'exemple 3.5	67 67
Tableau 4.1	Résultats numériques pour u, u^*	73
Tableau 4.2	Résultats numériques pour v, v^*	73
Tableau 4.3	Résultats numériques pour $\rho_0 = 0.5, x = 0.1$ et $y = 0.3$ dans l'exemple 4.2	75
Tableau 4.4	Erreur absolue $= u - u^* $ pour $\rho_0 = 1$ dans l'exemple 3.2	75
Tableau 4.5	Résultats numériques pour u, u^*	79
Tableau 4.6	Résultats numériques pour v, v^*	80
Tableau 4.7	Résultats numériques pour w, w^*	80
Tableau 5.1	L'erreur absolue $ Exact - \psi_4 $ pour différentes valeurs de (x, y, t) pour $h = -1$ et $r = -8/9$ dans l'exemple 5.3	89
Tableau 5.2	Comparaison entre la solution exacte et ψ_4 à $t = 0.2$ pour $h = -1$ et $r = -8/9$ dans l'exemple 5.3	89
Tableau 5.3	Comparaison entre la solution exacte et ψ_3 obtenu par (VIMHP) à $t = 20$ dans l'exemple 5.4	92
Tableau 5.4	L'erreur absolue de (VIMHP) et (VIM), (ADM) [67] pour différentes valeurs de (x, y) à $t = 10$ dans l'exemple 5.4	92

Liste des figures

Figures	Titre	Page
Figure 1.1	Le comportement de la solution exacte (a) et la solution approximative u_4 , (b) pour $-100 \leq x \leq 100$ et $0 \leq t \leq 0.5$	34
Figure 2.1	Le comportement de la solution exacte (a) et la solution approximative (b) pour $0 \leq t \leq 1$ et $-2\pi \leq x \leq 2\pi$	52
Figure 3.1	Le comportement de la solution exacte (a), et la solution approximative (b) pour $-20 \leq x \leq 20$ et $0 \leq t \leq 1$	63
Figure 3.2	Le comportement de la solution exacte (a) et la solution approximative (b) pour $-200 \leq x \leq 200$ et $0 \leq t \leq 1$	65
Figure 3.3	Le comportement de la solution exacte (a) et la solution approximative (b) pour $-30 \leq x \leq 30$ et $0 \leq t \leq 0.5$	68
Figure 5.1	Le comportement de la solution exacte (a) et la solution approximative (b) pour $-5 \leq x, y \leq 5$ et $t = 1$	90
Figure 5.2	Le comportement de la solution exacte et la solution approximative pour $t = 0.5, y = 4$	90
Figure 5.3	Le comportement de la solution exacte (a) et la solution approximative (b) pour $t = 10$ et $-500 \leq x, y \leq 500$	93
Figure 5.4	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives pour différents valeurs de t	93

Introduction

Avec l'essor de l'analyse par ses précurseurs **Newton**¹, **Leibniz**² et les **Bernoulli**³, au début du 17^e siècle, les équations différentielles commencent à attirer une grande attention de la part des grands mathématiciens de l'époque. Elles deviennent un outil vital important dans les bibliothèques mathématiques. Dès lors, elles jouent un rôle clé dans l'interprétation de nombreux phénomènes naturels et physiques à travers des modélisations mathématiques. Avec le développement rapide des sciences non linéaires, la recherche des solutions analytiques d'équations différentielles commence beaucoup à intéresser les mathématiciens de ces dernières années. Plusieurs méthodes sont ainsi proposées pour atteindre cet objectif.

La méthode de décomposition d'Adomian (ADM) est introduite par le mathématicien Américain George Adomian (1923-1996). Cette méthode est basée sur la recherche d'une solution sous forme de série et sur la décomposition de l'opérateur non linéaire en une série dont les termes sont calculés de manière récursive en utilisant les polynômes d'Adomian [6]. Une variante de la méthode de décomposition d'Adomian, obtenue par modification en [7] est appliquée pour la résolution de problèmes aux limites linéaires et non linéaires.

1. **Newton** : Isaac Newton (25 décembre 1642 – 20 mars 1727) est un philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais.

2. **Leibniz** : Gottfried Wilhelm Leibniz (1 juillet 1646 - 14 novembre 1716) est un philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand.

3. **Bernoulli** : Nicolas Bernoulli (1623-1708), Jacques (1654-1705) et Jean (1667-1748), tous deux fils de Nicolas ; Daniel (1700-1782), petit-fils de Nicolas et fils de Jean, La famille Bernoulli, qui s'est illustrée dans les mathématiques et la physique.

Cette méthode est appliquée à l'équation aux dérivées partielles dispersive d'ordre trois [81]. La contraction des solutions des ondes solitaires et des solutions rationnelles pour l'équation de KdV utilisant la méthode de décomposition d'Adomian est discutée dans [80], et utilisé pour résoudre l'équation de Laplace dans [75]. Une quantité considérable de travail de recherche a été investis récemment dans l'application de cette méthode à une large classe d'équations différentielles ordinaires linéaires et non linéaires, d'équations aux dérivées partielles et des équations de type intégral-différentielle dans [51, 79] en utilisant cette approche, etc. La convergence de cette méthode est étudiée dans [1, 2, 20, 21].

La méthode d'itération variationnelle (VIM) et la méthode de perturbation homotopique (HPM) ont d'abord été proposées par le mathématicien Chinois **Ji-Huan He**⁴ [32, 33]. Les deux méthodes ont été utilisées pour résoudre une grande variété de problèmes scientifiques particulièrement ceux modélisés par des équations aux dérivées partielles.

La technique (VIM) est considérée comme une modification de la méthode générale des multiplicateurs de Lagrange [39]. Il a été démontré que cette procédure est un outil puissant pour résoudre divers types de problèmes. Par exemple, ce schéma est utilisé dans [5, 18], pour résoudre l'équation de Burgers simple et de Burgers couplée. Dans [82] les applications de la présente méthode aux systèmes linéaires et non linéaires d'EDP sont fournies. La technique d'itération variationnelle est utilisée pour résoudre les équations de diffusion non linéaires, les EDO linéaires et non linéaires [83, 85].

Cette méthode est aussi appliquée dans [49] pour résoudre des équations différentielles avec retard, et dans [89] pour étudier l'équation de Klein-Gordon. Dans [8, 24] la méthode (VIM) est employée pour résoudre l'équation de Fokker-Planck. Dans [68], la méthode (VIM) est utilisée pour résoudre des problèmes aux limites de septième ordre. La méthode d'itération variationnelle est ap-

4. **Professeur : Ji-Huan He** : Ingénieur a l'Université de Soochow en Chine a proposé les deux méthodes (VIM) et (HPM). "La méthode déforme un problème complexe en une série d'équations linéaires faciles à résoudre."

pliquée dans [67] pour résoudre le modèle de population biologique, etc. La convergence de (VIM) est étudiée dans [58, 76].

L'avantage de la méthode d'itération variationnelle par rapport à la procédure de décomposition d'Adomian, est qu'elle permet de résoudre le problème sans avoir recours au calcul des polynômes d'Adomian qui demeurent assez pénibles à obtenir. Cette technique résout le problème sans recourir aussi à la discrétisation des variables. Par conséquent, les erreurs d'arrondi n'affectent pas les calculs numériques et elle permet de faire l'économie d'une mémoire et d'un temps d'ordinateur importants. Ce schéma fournit la solution du problème sous une forme fermée tandis que les techniques de point de maillage fournissent l'approximation aux points de maillage seulement. Aussi cette procédure est utile pour trouver une approximation précise de la solution exacte.

Avec le développement rapide des sciences non linéaires, il apparaît un intérêt croissant des scientifiques et des ingénieurs pour les méthodes analytiques asymptotiques pour les problèmes non linéaires. Bien qu'il soit très facile pour nous maintenant de trouver les solutions des systèmes linéaires à l'aide d'un ordinateur, il est toutefois encore très difficile de résoudre des problèmes non linéaires, que ce soit numériquement ou théoriquement. Cela est peut-être dû au fait que les différentes méthodes discrétisées ou simulations numériques appliquent des méthodes d'itération pour trouver les solutions numériques aux problèmes non linéaires, et presque toutes les techniques itératives sont sensibles aux solutions initiales. Il est donc très difficile d'obtenir des résultats convergents en cas de forte non-linéarité.

Les techniques de perturbation fournissent les outils les plus polyvalents disponibles pour l'analyse non linéaire des problèmes d'ingénierie. Diverses techniques de perturbation modifiées sont introduites et certains outils mathématiques, tels que la théorie variationnelle, la technologie de l'homotopie et la technique d'itération, sont proposés pour surmonter ces inconvénients dans [37]. Divers types de systèmes de problèmes non linéaires, ainsi que les exemples étudiés dans [37] peuvent être utilisés comme paradigmes de problèmes de physique réels.

La méthode (HPM) été utilisée par de nombreux mathématiciens et ingénieurs pour résoudre diverses équations. Cette méthode a été développée et améliorée par He et appliquée aux oscillateurs non linéaires présentant des discontinuités [34], aux équations des ondes non linéaires [35], et aux problèmes aux limites [36].

On peut dire que la méthode de perturbation homotopique est universelle et capable de résoudre différents types d'équations fonctionnelles non linéaires. Pour des exemples, elle a été appliquée aux équations aux dérivées partielles hyperboliques [15], au système Brusselator réaction-diffusion [12], à l'équation de Helmholtz et à l'équation de KdV de cinquième ordre [63]; dans [65] pour résoudre le modèle de population biologique et à d'autres équations dans [73], etc. Cette méthode déforme continument l'équation difficile à étudier en une équation simple, facile à résoudre. Dans cette méthode, la solution est considérée comme la somme d'une série infinie qui converge en général rapidement vers la solution exacte. La convergence de la méthode de perturbation homotopique est étudiée dans [13, 17].

Pour améliorer l'efficacité de ces algorithmes, plusieurs modifications ont été introduites par différents chercheurs. Abbasbandy [3, 4] a introduit l'élégant couplage des polynômes d'Adomian et la correction du (VIM) pour résoudre les équations différentielles de Riccati et de Klein-Gordon du second degré. Ce concept a ensuite été exploité dans [54, 55, 56, 57] pour résoudre différents problèmes aux limites singulières et non singulières, et des valeurs initiales.

Récemment, Ghorbani et Saberi-Nadjafi [28] et Ghorbani [29] ont introduit les polynômes de He en scindant le terme non linéaire de l'opérateur et ont également prouvé que les polynômes de He sont pleinement compatibles avec les polynômes d'Adomian mais sont plus faciles à calculer.

Pour ces raisons nous utilisons la méthode d'itération variationnelle à l'aide des polynômes de He (VIMHP) pour résoudre le modèle de population biologique dans les exemples étudiés, avec des conditions initiales différentes de

celles des autres auteurs qui ont appliqué différentes méthodes pour étudier ce modèle. Les termes non linéaires peuvent être facilement manipulés en utilisant les polynômes de He. Par identification des termes de mêmes puissances de p , nous trouvons des solutions approximatives proposées par la méthode (VIMHP) convergeant rapidement vers la solution exacte.

La méthode (HPM) combinée avec la transformation de Laplace été introduite par différents chercheurs pour décrire les idées de base de la méthode (HPTM) [40]. Elle a été utilisée efficacement dans plusieurs domaines pour résoudre différents types de problèmes. Par exemple, cet algorithme est utilisé dans [26] pour résoudre les équations KdV de troisième ordre et les équations de Burgers couplées en une et deux dimensions. Cette méthode est aussi appliquée dans [41] pour résoudre des problèmes non linéaires à couche limitée, et dans [30, 52] pour résoudre des problèmes non linéaires avec des conditions aux limites.

La méthode (HPTM) est utilisée dans notre article [90], pour résoudre les équations de Newell-Whitehead-Segel. Elle est aussi utilisée pour la résolution de plusieurs autres équations [10, 41, 42]. L'avantage de cette méthode réside dans sa capacité à combiner deux méthodes puissantes pour obtenir des approximations pour les équations non linéaires.

Objectif de ce travail

L'objectif de ce travail est de résoudre certaines formes d'équations comme l'équation de Newell-Whitehead-Segel, l'équation de Navier-Stokes, le modèle de population biologique en utilisant des nouvelles techniques

1. La méthode d'itération variationnelle (VIM).
2. La méthode de perturbation homotopique (HPM).
3. La méthode (HPM) combinée avec la transformation de Laplace (HPTM).
4. La méthode d'itération variationnelle avec les polynômes de He (VIMHP).

Ces nouvelles techniques ont atteint un grand intérêt en mathématiques appliquées, car elles permettent de déterminer les solutions d'équations différen-

tielles ordinaires, d'équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires. La solution, lorsqu'elle s'exprime par ces méthodes, se présente sous la forme d'une série qui converge rapidement sans que les coordonnées spatiales et temporelles ne soient discrétisées.

Plan de la thèse

Ce manuscrit sanctionnant ce travail est présenté par une introduction générale qui donne une idée sur l'importance et l'intérêt du thème abordé, tout en soulignant les objectifs visés.

Le manuscrit s'articule en cinq chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la description de la méthode (VIM) et à sa convergence, suivi par quelques applications aux équations différentielles ordinaires, aux équations aux dérivées partielles, aux équations de Burgers, à l'équation de la chaleur et à l'équation des ondes.

Le deuxième chapitre est consacré à la description de la méthode (HPM), à sa convergence, suivi par quelques applications sur le problème de diffusion de la réaction de Cauchy et sur les équations de Klein – Gordon.

Le troisième chapitre présente l'application de la méthode (HPTM) pour résoudre l'équation de Newell-Whitehead-Segel.

Le quatrième chapitre est dédié à l'application de la méthode (HPTM) pour la résolution de l'équation Navier-Stokes (système).

Le cinquième et dernier chapitre présente l'application de la méthode (VIMHP) pour l'étude du modèle de population biologique.

Le travail présenté s'achève par une conclusion générale et quelques perspectives envisagées pour développer et approfondir d'autres résultats.

Chapitre 1

Méthode d'Itération Variationnelle (VIM)

1.1 Description de la méthode (VIM)

En 1978, Inokuti, Sekine et Mura. [39] ont proposé la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour résoudre des équations différentielles non linéaires, présentes en mécanique quantique. Le principe de cette méthode est le même de celle de la méthode de Newton pour la résolution des équations algébriques. La méthode (VIM) est considérée comme une amélioration de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Considérons l'équation différentielle suivante [32, 58, 76, 85]

$$L(u) + N(u) = g(x), \quad (1.1)$$

où L est un opérateur linéaire défini par $L = \frac{d^m}{dt^m}$, $m \in \mathbb{N}^*$, N est un opérateur non linéaire et $g(x)$ est une fonction donnée. Les conditions initiales sont définies comme suit

$$u^{(k)}(0) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

où c_k désignent des nombres réels. Nous construisons une correction fonctionnelle selon la méthode variationnelle suivante

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t)[Lu_n(t) + N\tilde{u}_n(t) - g(t)]dt, \quad n \geq 0, \quad (1.2)$$

où λ est un multiplicateur général de Lagrange. $u_n(t)$ représente la n -ième approximation, le terme $\tilde{u}_n(t)$ est considéré comme une variation restreinte c'est à dire tel que $\delta\tilde{u}_n = 0$. La méthode d'itération variationnelle comporte deux étapes essentielles. Il faut d'abord déterminer le multiplicateur de Lagrange λ qui peut être identifié de manière optimale via l'intégration par parties et en utilisant la variation restreinte. Une fois λ déterminé, une formule d'itération sans variation restreinte, est utilisée pour la détermination des approximations $u_{n+1}(x)$; $n \geq 0$ de la solution $u(x)$. L'approximation zéro peut être n'importe quelle fonction sélective. Cependant, en utilisant les valeurs initiales $u(0)$, $u'(0)$, $u''(0)$, ... , $u^{(k)}(0)$ sont de préférence utilisés pour l'approximation sélective zéro u_0 comme nous le verrons plus tard. Par conséquent, la solution exacte sera la limite

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x).$$

La méthode d'itération variationnelle devrait être employée en suivant deux étapes essentielles [58, 76]

1. La détermination de multiplicateur de Lagrange λ .

Si $m = 1$, $\lambda(t) = -1$, $u_0(x) = u(0)$.

Si $m = 2$, $\lambda(t) = t - x$, $u_0(x) = u(0) + xu'(0)$,

d'une manière générale

$$\lambda(t) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} (t-x)^{m-1}, \quad u_0(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{k!} x^k, \quad c_k = u^{(k)}(0).$$

2. La détermination d'une formule d'itération.

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \frac{(-1)^m}{(m-1)!} (t-x)^{m-1} [Lu_n(t) + Nu_n(t) - g(t)] dt.$$

1.2 Convergence de la méthode (VIM)

Dans cette section, nous présenterons le théorème de convergence de la méthode d'itération variationnelle. La méthode transforme l'équation différentielle donnée en une suite de fonctions récurrentes. La limite de cette suite est considérée comme la solution de l'équation différentielle donnée.

Théorème 1.1. [58, 76] *Soit X est un espace de Banach et $B : X \rightarrow X$ est une application non linéaire. On suppose que l'application B vérifie la condition*

$$\|B(u) - B(\bar{u})\| \leq \gamma \|u - \bar{u}\|, \forall u, \bar{u} \in X, \tag{1.3}$$

où $0 < \gamma < 1$. Alors, l'application B possède un point fixe unique, $u \in X$, tel que $B(u) = u$. De plus, la suite

$$u_{n+1} = B(u_n), \quad (1.4)$$

converge vers le point fixe de B , pour tout choix arbitraire $u_0 \in X$.

Preuve

$$\begin{aligned} \|u_k - u_l\| &\leq \|u_k - u_{k-1}\| + \cdots + \|u_{l+1} - u_l\| = \\ &\|B_{k-1} - B_{k-2}\| + \cdots + \|B_l - B_{l-1}\| \\ &\leq \gamma \|u_{k-1} - u_{k-2}\| + \cdots + \gamma \|u_l - u_{l-1}\| \\ &\leq (\gamma^{k-2} + \gamma^{k-3} \cdots + \gamma^{l-l}) \|u_1 - u_0\| \\ &\leq \frac{\gamma^{l-1}}{1 - \gamma} \|u_1 - u_0\|. \end{aligned} \quad (1.5)$$

On peut supposer que $1 \leq l < k$, cela donne $\|u_k - u_l\| \rightarrow 0$, comme $k, l \rightarrow \infty$, donc $(u_k)_{k=1}^\infty$ est une suite de Cauchy. Puisque X est un espace de Banach, la suite converge vers un point fixe.

D'après le théorème (1.1), pour l'application non linéaire

$$B(u_n) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t)[Lu_n(t) + N\tilde{u}_n(t) - g(t)] dt, \quad (1.6)$$

une condition suffisante pour la convergence de la méthode d'itération variationnelle est que B doit être strictement contractante. De plus, la suite (1.4) converge vers le point fixe de B qui est aussi la solution du problème (1.1).

1.3 Application de la méthode (VIM) pour les équations différentielles ordinaires.

1.3.1 Equation différentielle ordinaire linéaire de premier ordre

Description de la méthode

Considérons l'équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre [85]

$$\begin{cases} u' + p(x)u = q(x), \\ u(0) = \alpha, \end{cases} \quad (1.7)$$

où p, q sont deux fonctions continues et dérivables.

la fonction de correction pour cette équation est donnée par

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t)[u'_n(t) + p(t)\tilde{u}_n(t) - q(t)]dt, \quad (1.8)$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange. Ici λ peut être une constante ou une fonction de t et \tilde{u}_n est une valeur restreinte.

Prenant la variation des deux côtés de l'équation (1.8) par rapport à u_n

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(t)[u'_n(t) + p(t)\tilde{u}_n(t) - q(t)]dt, \quad (1.9)$$

devient

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(t)u'_n(t)dt, \quad (1.10)$$

en utilisant le fait que $\delta \tilde{u}_n = 0$ et $\delta q(t) = 0$.

L'intégration de l'équation (1.10) par parties donne

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta \lambda u_n \Big|_0^x - \delta \int_0^x \lambda'(t)u_n(t)dt, \quad (1.11)$$

ou

$$\delta u_{n+1} = \delta(1 + \lambda \Big|_{t=x})u_n - \delta \int_0^x \lambda'(t)u_n(t)dt, \quad (1.12)$$

la condition d'extremum de u_{n+1} exige que $\delta u_{n+1} = 0$. Cela signifie que le côté gauche de (1.12) est nulle et par conséquent, le côté droit devrait être égal à zéro également. Cela donne les conditions stationnaires

$$\begin{cases} 1 + \lambda \Big|_{t=x} = 0, \\ \lambda' \Big|_{t=x} = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Alors

$$\lambda(t) = -1.$$

La substitution de cette valeur du multiplicateur de Lagrange dans (1.8) donne la formule d'itération suivante

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x [u'_n(t) + p(t)u_n(t) - q(t)]dt. \quad (1.14)$$

On tenant compte de la condition donnée $u(0) = \alpha$, nous pouvons sélectionner l'approximation initiale $u_0 = \alpha$. En utilisant cette sélection dans l'équation (1.14) nous obtenons les approximations successives suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = \alpha, \\ u_1(x) = \alpha - \int_0^x [u'_0(t) + p(t)u_0(t) - q(t)] dt, \\ u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x [u'_1(t) + p(t)u_1(t) - q(t)] dt, \\ u_3(x) = u_2(x) - \int_0^x [u'_2(t) + p(t)u_2(t) - q(t)] dt, \\ \vdots \\ u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x [u'_n(t) + p(t)u_n(t) - q(t)] dt. \end{array} \right.$$

Finalement, la solution exacte est donnée par

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x).$$

Exemple 1.1. Considérons l'équation différentielle ordinaire homogène suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} u' - u = 0, \\ u(0) = 1. \end{array} \right. \quad (1.15)$$

La solution exacte de ce problème par les méthodes classiques est $u(x) = e^x$. Pour utiliser la méthode (VIM), nous suivons la discussion présentée ci-dessus pour trouver $\lambda = -1$ et $u_0 = 1$. Par conséquent, la formule d'itération est donnée par

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x [u'_n(t) - u_n(t)] dt, \quad n \geq 0.$$

Par suite nous avons les approximations successives

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x [u'_0(t) - u_0(t)] dt = 1 + x, \\ u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x [u'_1(t) - u_1(t)] dt = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2, \\ u_3(x) = u_2(x) - \int_0^x [u'_2(t) - u_2(t)] dt = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3, \\ \vdots \\ u_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n. \end{array} \right.$$

Par passage à la limite, $u(x) = e^x$, qui est la solution exacte de (1.15).

Exemple 1.2. considérons l'équation différentielle ordinaire non homogène suivante

$$\begin{cases} u' - 2xu = x, \\ u(0) = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1.16)$$

Par les méthodes classiques la solution exacte est $u(x) = -\frac{1}{2} + e^{x^2}$.
 Suite à la discussion présentée ci-dessus, nous trouvons $\lambda = -1$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.
 Par conséquent, la formule d'itération est donnée par

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x [u'_n(t) - 2tu_n(t) - t] dt, \quad n \geq 0.$$

Il en résulte, les approximations successives suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = \frac{1}{2}, \\ u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x [u'_0(t) - 2tu_0(t) - t] dt \\ \quad = \frac{1}{2} + x^2 = -\frac{1}{2} + (1 + x^2), \\ u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x [u'_1(t) - 2tu_1(t) - t] dt \\ \quad = \frac{1}{2} + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 = -\frac{1}{2} + (1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4), \\ u_3(x) = u_2(x) - \int_0^x [u'_2(t) - 2tu_2(t) - t] dt \\ \quad = \frac{1}{2} + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 = -\frac{1}{2} + (1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6), \\ u_4(x) = u_3(x) - \int_0^x [u'_3(t) - 2tu_3(t) - t] dt \\ \quad = \frac{1}{2} + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 = -\frac{1}{2} + (1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8), \\ \vdots \\ u_n(x) = -\frac{1}{2} + (1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \dots + \frac{1}{n!}x^{2n}). \end{array} \right.$$

Cette suite converge vers la solution exacte de (1.16).

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = -\frac{1}{2} + e^{x^2}.$$

1.3.2 Equation différentielle ordinaire linéaire du second ordre

Description de la méthode

Considérons l'équation différentielle linéaire de second ordre avec des coefficients constants [85]

$$\begin{cases} u''(x) + au'(x) + bu(x) = g(x), \\ u(0) = \alpha, \\ u'(0) = \beta. \end{cases} \quad (1.17)$$

La fonction de correction pour cette équation est donnée par

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t)[u_n''(t) + a\tilde{u}_n'(t) + b\tilde{u}_n(t) - g(t)]dt, \quad n \geq 0, \quad (1.18)$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange et \tilde{u}_n est une valeur restreinte où $\delta\tilde{u}_n = 0$. Prenant la variation des deux côtés de l'équation (1.18) par rapport à u_n on trouve

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(t)[u_n''(t) + a\tilde{u}_n'(t) + b\tilde{u}_n(t) - g(t)]dt, \quad (1.19)$$

qui devient

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(t)u_n''(t)dt, \quad (1.20)$$

en utilisant le fait que $\delta\tilde{u}_n = \delta\tilde{u}_n' = 0$ et $\delta g(t) = 0$.

L'intégration de l'équation (1.20) par parties deux fois donne

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \lambda\delta u_n' - \delta\lambda' u_n + \int_0^x \lambda'' u_n dt, \quad (1.21)$$

ou

$$\delta u_{n+1} = \delta(1 - \lambda' \Big|_{t=x})u_n + \delta\lambda u_n' + \delta \int_0^x \lambda'' u_n dt. \quad (1.22)$$

La condition d'extremum de u_{n+1} exige que $\delta u_{n+1} = 0$. Cela signifie que le côtés gauche de l'équation (1.22) est nulle et par conséquent le côtés droit devrait être égal à zéro également. Cela donne les conditions stationnaires

$$\begin{cases} 1 - \lambda' \Big|_{t=x} = 0, \\ \lambda \Big|_{t=x} = 0, \\ \lambda'' \Big|_{t=x} = 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

Par conséquent

$$\lambda(t) = t - x. \quad (1.24)$$

La substitution de cette valeur du multiplicateur de Lagrange dans (1.18) donne la formule d'itération

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x (t - x)(u_n''(t) + au_n'(t) + bu_n(t) - g(t)) dt, \quad (1.25)$$

obtenu en supprimant la restriction sur u_n et u_n' qui a été utilisée pour la détermination de λ .

En considérant la condition donnée $u(0) = \alpha$, $u'(0) = \beta$, nous pouvons sélectionner l'approximation de zéro $u_0(x) = u(0) + xu'(0) = \alpha + \beta x$. En utilisant cette sélection dans la formule (1.25), nous obtenant les approximations successives suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = \alpha + \beta x, \\ u_1(x) = \alpha + \beta x + \int_0^x (t - x)[u_0''(t) + au_0'(t) + bu_0(t) - g(t)] dt, \\ u_2(x) = u_1(x) + \int_0^x (t - x)[u_1''(t) + au_1'(t) + bu_1(t) - g(t)] dt, \\ u_3(x) = u_2(x) + \int_0^x (t - x)[u_2''(t) + au_2'(t) + bu_2(t) - g(t)] dt, \\ \vdots \\ u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x (t - x)[u_n''(t) + au_n'(t) + bu_n(t) - g(t)] dt. \end{array} \right.$$

Notre méthode (VIM) exige que la solution exacte soit

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x).$$

Dans ce qui suit, nous allons appliquer la méthode (VIM) comme elle est présentée précédemment à deux modèles d'EDO de second ordre.

Exemple 1.3. *Considérons l'équation différentielle ordinaire suivante*

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + 4u = 0, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 2. \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Les méthodes classiques pour résoudre cette équation supposent que la solution est de la forme $u(x) = e^{rx}$, en substituant à trouver r . Cependant, à la suite de la discussion présentée ci-dessus, nous trouvons que $\lambda(t) = t - x$, et nous pouvons mettre $u_0(x) = 1 + 2x$.

Par conséquent, la formule d'itération est donnée par

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x (t - x)[u_n''(t) + 4u_n(t)] dt, n \geq 0,$$

ensuite, et les approximations successives

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = 1 + 2x, \\ u_1(x) = u_0(x) + \int_0^x (t - x)[u_0''(t) + 4u_0(t)] dt \\ \quad = 1 + 2x - \frac{1}{2!}(2x)^2 - \frac{1}{3!}(2x)^3, \\ u_2(x) = u_1(x) + \int_0^x (t - x)[u_1''(t) + 4u_1(t)] dt, \\ \quad = 1 + 2x - \frac{1}{2!}(2x)^2 - \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{4!}(2x)^4 + \frac{1}{5!}(2x)^5, \\ u_3(x) = u_2(x) + \int_0^x (t - x)[u_2''(t) + 4u_2(t)] dt, \\ \quad = 1 + 2x - \frac{1}{2!}(2x)^2 - \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{4!}(2x)^4 + \frac{1}{5!}(2x)^5 - \frac{1}{6!}(2x)^6 - \frac{1}{7!}(2x)^7, \\ \vdots \end{array} \right.$$

Enfin, la solution exacte de (1.26) est

$$\begin{aligned} u(x) &= (1 - \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 + \dots) + (2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{5!}(2x)^5 + \dots) \\ &= \cos(2x) + \sin(2x). \end{aligned}$$

Exemple 1.4. *Considérons l'équation différentielle ordinaire non homogène de second ordre suivante*

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + u' - 2u = -2x + 1, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 2. \end{array} \right. \quad (1.27)$$

Par la méthode usuelle nous trouvons que la solution exacte de (1.27) est $u(x) = x + e^x$. De la même manière, $\lambda(t) = t - x$, et $u_0(x) = 1 + 2x$.

Par conséquent, la formule d'itération est donnée par

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x (t-x)[u_n''(t) + u_n'(t) - 2u_n(t) + 2t - 1] dt, \quad n \geq 0,$$

et les approximations successives

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = 1 + 2x, \\ u_1(x) = u_0(x) + \int_0^x (t-x)[u_0''(t) + u_0'(t) - 2u_0(t) + 2t - 1] dt \\ \quad = 1 + 2x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3}x^3, \\ u_2(x) = u_1(x) + \int_0^x (t-x)[u_1''(t) + u_1'(t) - 2u_1(t) + 2t - 1] dt, \\ \quad = 1 + 2x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{30}x^5, \\ u_3(x) = u_2(x) + \int_0^x (t-x)[u_2''(t) + u_2'(t) - 2u_2(t) + 2t - 1] dt, \\ \quad = 1 + 2x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{180}x^6 + \frac{1}{630}x^7, \\ \vdots \end{array} \right.$$

Cela aboutit, dans la limite d'une infinité de termes, la solution exacte de (1.27)

$$\begin{aligned} u(x) &= x + \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots\right) \\ &= x + e^x. \end{aligned}$$

1.3.3 Equation différentielle ordinaire linéaire du troisième ordre

Description de la méthode

Considérons maintenant l'équation différentielle ordinaire linéaire du troisième ordre avec des coefficients constants [85]

$$\left\{ \begin{array}{l} u''' + au'' + bu' + cu = g(x), \\ u(0) = \alpha, \\ u'(0) = \beta, \\ u''(0) = \gamma. \end{array} \right. \quad (1.28)$$

la fonction de correction pour (1.28) est donnée par

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t)[u_n'''(t) + a\tilde{u}_n''(t) + b\tilde{u}_n'(t) + c\tilde{u}_n(t) - g(t)]dt, \quad (1.29)$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange et \tilde{u}_n et ses dérivées première et seconde sont des valeurs restreintes c'est à dire tel que $\delta\tilde{u}_n = \delta\tilde{u}_n' = \delta\tilde{u}_n'' = 0$. En prenant la variation des deux côtés de l'équation (1.29) par rapport à la variable u_n en procédant comme (1.17), nous trouvons

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(t)(u_n'''(t) + a\tilde{u}_n''(t) + b\tilde{u}_n'(t) + c\tilde{u}_n(t) - g(t))dt, \quad (1.30)$$

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(t)u_n'''(t)dt. \quad (1.31)$$

L'intégration de l'équation (1.31) par parties trois fois consécutivement conduit au résultat

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta(\lambda u_n'' - \lambda' u_n' + \lambda'' u_n) + \delta \int_0^x \lambda'''(t)u_n dt. \quad (1.32)$$

L'état extremum de u_{n+1} exige que $\delta u_{n+1} = 0$. Cela signifie que le côté gauche de l'équation (1.32) est nul et par conséquent le côté droit devrait être nul également. Cela donne les conditions stationnaires

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \lambda'' \Big|_{t=x} = 0, \\ \lambda \Big|_{t=x} = 0, \\ \lambda' \Big|_{t=x} = 0, \\ \lambda''' \Big|_{t=x} = 0. \end{array} \right. \quad (1.33)$$

Alors,

$$\lambda(t) = -\frac{1}{2!}(t-x)^2.$$

La substitution de cette valeur du multiplicateur de Lagrange dans (1.29) donne

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \frac{1}{2!}(t-x)^2[u_n'''(t) + a u_n''(t) + b u_n'(t) + c u_n(t) - g(t)]dt. \quad (1.34)$$

En considérant les conditions données $u(0) = \alpha$, $u'(0) = \beta$, et $u''(0) = \gamma$, nous pouvons choisir l'approximation initiale $u_0(x) = \alpha + \beta x + \frac{1}{2}\gamma x^2$.

En utilisant cette sélection dans la formule (1.34), nous obtenons les approximations successives suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = \alpha + \beta x + \frac{1}{2}\gamma x^2, \\ u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x \frac{1}{2!}(t-x)^2 [u_0'''(t) + au_0''(t) + bu_0'(t) + cu_0(t) - g(t)] dt, \\ u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x \frac{1}{2!}(t-x)^2 [u_1'''(t) + au_1''(t) + bu_1'(t) + cu_1(t) - g(t)] dt, \\ \vdots \\ u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \frac{1}{2!}(t-x)^2 [u_n'''(t) + au_n''(t) + bu_n'(t) + cu_n(t) - g(t)] dt. \end{array} \right.$$

Exemple 1.5. Considérons l'équation différentielle ordinaire homogène suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} u''' - u = 0, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 0, \\ u''(0) = 1. \end{array} \right.$$

Suite à ce qui précède, $\lambda(t) = -\frac{1}{2!}(t-x)^2$ et $u_0(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$.

Ici, la formule d'itération est donnée par

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \frac{1}{2!}(t-x)^2 [u_n'''(t) - u_n'(t)] dt, \quad n \geq 0 .$$

Les approximations successives sont

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2, \\ u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x \frac{1}{2!}(t-x)^2 [u_0'''(t) - u_0'(t)] dt = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4, \\ u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x \frac{1}{2!}(t-x)^2 [u_1'''(t) - u_1'(t)] dt = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6, \\ \vdots \\ u_n(x) = (1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \dots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n}). \end{array} \right.$$

La suite (u_n) converge vers la solution exacte

$$u(x) = \cosh x.$$

Exemple 1.6. Considérons l'équation différentielle ordinaire non homogène suivante

$$\begin{cases} u''' - 2u'' + u' = 1, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 2, \\ u''(0) = 2. \end{cases}$$

De la même procédure, $\lambda = -\frac{1}{2!}(t-x)^2$ et $u_0(x) = 2x + x^2$.

Alors, la formule d'itération est donnée par

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \frac{1}{2!}(t-x)^2 [u_n'''(t) - 2u_n''(t) + u_n'(t) - 1] dt, \quad n \geq 0 .$$

Les approximations successives suivantes

$$\begin{cases} u_0(x) = 2x + x^2, \\ u_1(x) = u_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{2!}(t-x)^2 [u_0'''(t) - 2u_0''(t) + u_0'(t) - 1] dt \\ \quad = 2x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{12}x^4, \\ u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x \frac{1}{2!}(t-x)^2 [u_1'''(t) - 2u_1''(t) + u_1'(t) - 1] dt \\ \quad = 2x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3!}x^4 - \frac{7}{120}x^5, \\ u_3(x) = u_2(x) - \int_0^x \frac{1}{2!}(t-x)^2 [u_2'''(t) - 2u_2''(t) + u_2'(t) - 1] dt \\ \quad = 2x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3!}x^4 - \frac{1}{4!}x^5 \dots, \\ \vdots \end{cases}$$

Finalement, la solution exacte est

$$\begin{aligned} u(x) &= x + x(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots) \\ &= x(1 + e^x). \end{aligned}$$

1.3.4 Equation de Riccati

Exemple 1.7. *Considérons l'équation différentielle ordinaire non linéaire suivante [85]*

$$\begin{cases} u' = u^2 - 2xu + x^2 + 1, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Comme précédemment, $\lambda = -1$, et $u_0 = 1$. Cela conduit à la formule d'itération suivante

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x [u'_n(t) - u_n^2(t) + 2tu_n(t) - t^2 - 1] dt, n \geq 0,$$

qui donne les approximations successives suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x [u'_0(t) - u_0^2(t) + 2tu_0(t) - t^2 - 1] dt \\ \quad = 1 + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3, \\ u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x ([u'_1(t) - u_1^2(t) + 2tu_1(t) - t^2 - 1] dt \\ \quad = 1 + 2x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^6 + \frac{1}{63}x^7, \\ u_3(x) = u_2(x) - \int_0^x [u'_2(t) - u_2^2(t) + 2tu_2(t) - t^2 - 1] dt \\ \quad = 1 + 2x - x^2 + x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{9}x^6 + \dots \\ u_4(x) = u_3(x) - \int_0^x [u'_3(t) - u_3^2(t) + 2tu_3(t) - t^2 - 1] dt \\ \quad = 1 + 2x + x^2 + x^3 + x^4 + \frac{11}{15}x^5 - \frac{19}{45}x^6 + \dots \\ u_5(x) = u_4(x) - \int_0^x [u'_4(t) - u_4^2(t) + 2tu_4(t) - t^2 - 1] dt \\ \quad = 1 + 2x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots \\ \vdots \end{array} \right.$$

Alors, la solution exacte est donner par

$$\begin{aligned} u(x) &= x + (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \dots) \\ &= x + \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

1.4 Application de la méthode (VIM) pour les équations aux dérivées partielles

1.4.1 Equation de KDV

L'équation KDV (n, m) est donnée par [84]

$$u_t + (u^n)_x + (u^m)_{xxx} = 0$$

Exemple 1.8. Nous considérons d'abord l'équation de KDV(2,1) [84]

$$\begin{cases} u_t - 3(u^2)_x + u_{xxx} = 0, \\ u(x, 0) = 6x. \end{cases} \quad (1.35)$$

la fonction de correction pour l'équation (1.35) est donnée par

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(s) \left[\frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} - 3 \frac{\partial(\tilde{u}_n^2)(x, s)}{\partial x} + \frac{\partial^3(\tilde{u}_n)(x, s)}{\partial x^3} \right] ds. \quad (1.36)$$

Les conditions stationnaires sont

$$\begin{cases} \lambda' = 0, \\ 1 + \lambda = 0. \end{cases}$$

Nous avons $\lambda = -1$.

La substitution de cette valeur $\lambda = -1$ dans (1.36), donne la formule d'itération suivante

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} - 3 \frac{\partial(\tilde{u}_n^2)(x, s)}{\partial x} + \frac{\partial^3(\tilde{u}_n)(x, s)}{\partial x^3} \right] ds. \quad (1.37)$$

En prenant $u_0(x, t) = 6x$ et en utilisant la formule (1.37), les approximations successives sont

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x, t) = 6x, \\ u_1(x, t) = 6x(1 + 36t), \\ u_2(x, t) = 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 15552t^3), \\ u_3(x, t) = 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 15552t^3 + 1119744t^4 + 20155392t^5 + \dots), \\ u_4(x, t) = 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 46656t^3 + 1679616t^4 + 6046617t^5 \\ \quad + 2176782336t^6 + \dots), \\ \vdots \end{array} \right.$$

Enfin, la solution exacte de (1.35) est la suivante

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 46656t^3 + 1679616t^4 + 6046617t^5 + \dots) \\ &= \frac{6x}{1 - 36t}, \quad |36t| < 1. \end{aligned}$$

Exemple 1.9. Nous considérons ensuite l'équation KDV(2,2) [84]

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + (u^2)_x + (u^2)_{xxx} = 0, \\ u_0(x, 0) = x, \end{array} \right. \quad (1.38)$$

la fonction de correction pour l'équation (1.38) est donnée par

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(s) \left[\frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} + \frac{\partial(\tilde{u}_n^2)(x, s)}{\partial x} + \frac{\partial^3(\tilde{u}_n^2)(x, s)}{\partial x^3} \right] ds. \quad (1.39)$$

Comme ce qui Procède, nous trouvons $\lambda = -1$, $u_0(x, t) = x$. En utilisant la formule (1.40).

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} + \frac{\partial(u_n^2)(x, s)}{\partial x} + \frac{\partial^3(u_n^2)(x, s)}{\partial x^3} \right] ds. \quad (1.40)$$

Nous obtenons les approximations successives suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x, t) = x, \\ u_1(x, t) = x(1 - 2t), \\ u_2(x, t) = x(1 - 2t + 4t^2 - \frac{8}{3}t^3), \\ u_3(x, t) = x(1 - 2t + 4t^2 - 8t^3 + \frac{32}{3}t^4 - \frac{32}{3}t^5) + \dots, \\ u_4(x, t) = x(1 - 2t + 4t^2 - 8t^3 + 16t^4 - 32t^5 + 64t^6) + \dots, \\ \vdots \end{array} \right.$$

Finalement, la solution exacte de (1.38) est

$$\begin{aligned} u(x, t) &= x(1 - 2t + 4t^2 - 8t^3 + 16t^4 - 32t^5 + 64t^6 - 128t^7 + \dots) \\ &= \frac{x}{1 + 2t}, \quad |2t| < 1. \end{aligned}$$

1.5 Application de la méthode (VIM) pour un système différentiel .

Description de la méthode

Considérons le système d'équation aux dérivées partielles non linéaire suivant [82]

$$\left\{ \begin{array}{l} L_t u + R_1(u, v, w) + N_1(u, v, w) = g_1, \\ L_t v + R_2(u, v, w) + N_2(u, v, w) = g_2, \\ L_t w + R_3(u, v, w) + N_3(u, v, w) = g_3, \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = f_1(x), \\ v(x, 0) = f_2(x), \\ w(x, 0) = f_3(x), \end{array} \right.$$

où L_t est un opérateur différentiel partiel de premier ordre, R_j et N_j , $1 \leq j \leq 3$ sont des opérateurs linéaires et non linéaires respectivement et g_1 , g_2 et g_3 sont des termes sources.

la fonction de correction selon (VIM) de ce système peut être écrit comme suit

$$\begin{cases} u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda_1 [Lu_n(s) + R_1(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n) + N_1(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n) - g_1(s)] ds, \\ v_{n+1}(x, t) = v_n(x, t) + \int_0^t \lambda_2 [Lv_n(s) + R_2(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n) + N_2(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n) - g_2(s)] ds, \\ w_{n+1}(x, t) = w_n(x, t) + \int_0^t \lambda_3 [Lw_n(s) + R_3(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n) + N_3(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n) - g_3(s)] ds, \end{cases}$$

où $\lambda_j, 1 \leq j \leq 3$ sont des multiplicateurs de Lagrange généraux et $\tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n$ sont des variations restreintes qui signifient $\delta\tilde{u}_n = 0, \delta\tilde{v}_n = 0$ et $\delta\tilde{w}_n = 0$.

Il faut d'abord déterminer les multiplicateurs de Lagrange λ_j qui seront identifiés de façon optimale via l'intégration par parties.

Les approximations successives $u_{n+1}(x, t), v_{n+1}(x, t)$ et $w_{n+1}(x, t), n \geq 0$ des solutions $u(x, t), v(x, t),$ et $w(x, t)$ sont immédiatement déterminées après l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange obtenus λ_j et des fonctions sélectionnées u_0, v_0 et w_0 .

Par conséquent, la solution exacte est donnée par

$$\begin{cases} u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t), \\ v(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, t), \\ w(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x, t). \end{cases}$$

Exemple 1.10. *Considérons le système différentiel linéaire suivant [82]*

$$\begin{cases} u_t - v_x - (u - v) = -2, \\ v_t + u_x - (u - v) = -2, \\ u(x, 0) = 1 + e^x, \\ v(x, 0) = -1 + e^x. \end{cases} \quad (1.41)$$

La fonction de correction pour le système (1.41) est donnés par

$$\begin{cases} u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda_1(s) \left[\frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} - \frac{\partial v_n(x, s)}{\partial x} - \tilde{u}_n(x, s) + \tilde{v}_n(x, s) + 2 \right] ds, \\ v_{n+1}(x, t) = v_n(x, t) + \int_0^t \lambda_2(s) \left[\frac{\partial v_n(x, s)}{\partial s} + \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial x} - \tilde{u}_n(x, s) + \tilde{v}_n(x, s) + 2 \right] ds. \end{cases} \quad (1.42)$$

Les conditions stationnaires sont données comme suit

$$\begin{cases} 1 + \lambda_1 = 0, \lambda_1' \Big|_{s=t} = 0, \\ 1 + \lambda_2 = 0, \lambda_2' \Big|_{s=t} = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1,$$

la substitution de ces valeurs dans la formule (1.42) donne la formule d'itération

$$\begin{cases} u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} - \frac{\partial v_n(x, s)}{\partial x} - u_n(x, s) + v_n(x, s) + 2 \right] ds, \\ v_{n+1}(x, t) = v_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial v_n(x, s)}{\partial s} + \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial x} - u_n(x, s) + v_n(x, s) + 2 \right] ds. \end{cases}$$

En utilisant les valeurs initiales $u_0(x, t) = 1 + e^x$ et $v_0(x, t) = -1 + e^x$, nous obtenons les approximations successives suivantes

$$\begin{cases} u_1(x, t) = 1 + e^x + te^x, \\ v_1(x, t) = -1 + e^x - te^x, \\ u_2(x, t) = 1 + e^x + te^x + \frac{t^2}{2!}e^x, \\ v_2(x, t) = -1 + e^x - te^x + \frac{t^2}{2!}e^x, \\ u_3(x, t) = 1 + e^x + te^x + \frac{t^2}{2!}e^x + \frac{t^3}{3!}e^x, \\ v_3(x, t) = -1 + e^x - te^x + \frac{t^2}{2!}e^x - \frac{t^3}{3!}e^x, \\ \vdots \end{cases}$$

Enfin, la solution exacte est

$$\begin{cases} u(x, t) = 1 + e^x(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots) = 1 + e^{x+t}, \\ v(x, t) = -1 + e^x(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots) = -1 + e^{x-t}. \end{cases}$$

1.6 Application de la méthode (VIM) pour l'équation de Burgers

Exemple 1.11. *Considérons l'équation de Burgers [18]*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = 2x. \end{cases} \quad (1.43)$$

Pour résoudre l'équation (1.43) au moyen de la méthode d'itération variationnelle, nous construisons la formule d'itération suivante

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} + u_n(x, s) \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_n(x, s)}{\partial x^2} \right] ds, \quad n \geq 0. \quad (1.44)$$

Nous commençons par l'approximation initiale $u_0(x, t) = 2x$ et par la formule d'itération ci-dessus (1.44), nous pouvons obtenir directement les autres approximations

$$\begin{cases} u_1(x, t) = 2x - 4xt, \\ u_2(x, t) = 2x - 4xt + 8xt^2 - \frac{16}{3}xt^3, \\ u_3(x, t) = 2x - 4xt + 8xt^2 - 16xt^3 + \frac{64}{3}xt^4 - \frac{64}{3}xt^5 + \frac{128}{9}xt^6 - \frac{265}{63}xt^7, \\ u_4(x, t) = 2x - 4xt + 8xt^2 - 16xt^3 + 32xt^4 - \frac{832}{15}xt^5 + \frac{256}{3}xt^6 - \frac{7424}{63}xt^7 + \frac{9088}{63}xt^8 \\ \quad - \frac{88064}{567}xt^9 \dots, \\ \vdots \end{cases}$$

La solution exacte de (1.43) est la suivante

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2x(1 - 2t + 4t^2 - 8t^3 + 16t^4 - \dots) \\ &= \frac{2x}{1 + 2t}, \quad |2t| < 1. \end{aligned}$$

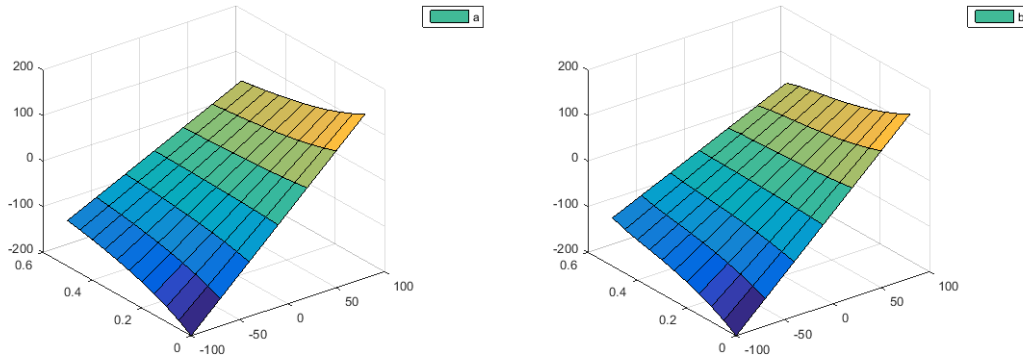


FIGURE 1.1 – Le comportement de la solution exacte (a) et la solution approximative u_4 , (b) pour $-100 \leq x \leq 100$ et $0 \leq t \leq 0.5$.

Exemple 1.12. Nous considérons le system de Burgers [5]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = \cos x, \\ v(x, 0) = \cos x. \end{cases} \quad (1.45)$$

Pour résoudre le système d'équations (1.45) au moyen de la méthode (VIM), nous construisons la formule d'itération suivante

$$\begin{cases} u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - 2u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial(u_n v_n)}{\partial x} \right] ds, \\ v_{n+1}(x, t) = v_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial v_n}{\partial s} - \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} - 2v_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{\partial(u_n v_n)}{\partial x} \right] ds. \end{cases} \quad (1.46)$$

Nous commençons par l'approximation initiale donnée par l'équation (1.45) et

par la formule d'itération ci-dessus, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x, t) = \cos x - t \cos x, \\ v_1(x, t) = \cos x - t \cos x, \\ u_2(x, t) = \cos x - t \cos x + \frac{t^2}{2!} \cos x, \\ v_2(x, t) = \cos x - t \cos x + \frac{t^2}{2!} \cos x, \\ u_3(x, t) = \cos x - t \cos x + \frac{t^2}{2!} \cos x - \frac{t^3}{3!} \cos x, \\ v_3(x, t) = \cos x - t \cos x + \frac{t^2}{2!} \cos x - \frac{t^3}{3!} \cos x, \\ \vdots \end{array} \right.$$

Enfin, la solution exacte de (1.45) est la suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) = \cos x \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = e^{-t} \cos x, \\ v(x, t) = \cos x \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = e^{-t} \cos x. \end{array} \right.$$

1.7 Application de la méthode (VIM) pour l'équation de la chaleur et l'équation des ondes

1.7.1 Equation de la chaleur

Exemple 1.13. Nous considérons l'équation de la chaleur à une dimension [74, 87]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = x^2. \end{array} \right. \quad (1.47)$$

Pour obtenir les approximations successives de l'équation (1.47) par (VIM), nous utilisons l'approximation initiale $u_0(x, t) = u(x, 0) = x^2$, et la formule d'itération

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n}{\partial s}(x, s) - \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, s) \right] ds, \quad n \geq 0,$$

nous obtenons les approximations successives

$$\begin{cases} u_0(x, t) = x^2, \\ u_1(x, t) = x^2 + x^2t, \\ u_2(x, t) = x^2 + x^2t + \frac{1}{2!}x^2t^2, \\ u_3(x, t) = x^2 + x^2t + \frac{1}{2!}x^2t^2 + \frac{1}{3!}x^2t^3, \\ \vdots \\ u_n(x, t) = x^2(1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \dots + \frac{1}{n!}t^n). \end{cases}$$

La suite (u_n) converge vers la solution exacte de (1.47)

$$u(x, t) = x^2e^t.$$

Exemple 1.14. *Considérons l'équation de la chaleur à deux dimensions [74, 87]*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}(y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}), & 0 < x, y < 1, t > 0, \\ u(x, y, 0) = y^2. \end{cases} \quad (1.48)$$

La formule d'itération selon (VIM) de cette équation est

$$u_{n+1}(x, y, t) = u_n(x, y, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n}{\partial s}(x, y, s) - \frac{1}{2}y^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} \right] ds. \quad (1.49)$$

En utilisant la valeur initiale $u_0(x, y, t) = y^2$, et la formule d'itération (1.49) nous obtenons les approximations successives

$$\begin{cases} u_1(x, y, t) = y^2 + x^2t, \\ u_2(x, y, t) = y^2 + x^2t + \frac{1}{2!}y^2t^2, \\ u_3(x, y, t) = y^2 + x^2t + \frac{1}{2!}y^2t^2 + \frac{1}{3!}x^2t^3, \\ u_4(x, y, t) = y^2 + x^2t + \frac{1}{2!}y^2t^2 + \frac{1}{3!}x^2t^3 + \frac{1}{4!}y^2t^4, \\ \vdots \end{cases}$$

Finalement, la solution exacte de (1.48) est

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= x^2(t + \frac{1}{3!}t^3 + \dots) + y^2(1 + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \dots) \\ &= x^2 \sinh t + y^2 \cosh t. \end{aligned}$$

Exemple 1.15. *Considérons l'équation de la chaleur à trois dimensions avec la condition initiale*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = x^4 y^4 z^4 + \frac{1}{36} (x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}), & 0 < x, y, z < 1, t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = 0. \end{cases} \quad (1.50)$$

La formule d'itération de l'équation (1.50) est

$$u_{n+1}(x, y, z, t) = u_n(x, y, z, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n}{\partial s}(x, y, z, s) - x^4 y^4 z^4 - \frac{1}{36} (x^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}) \right] ds.$$

Par suite, les approximations successives sont

$$\begin{cases} u_0(x, y, z, t) = 0, \\ u_1(x, y, z, t) = x^4 y^4 z^4 t, \\ u_2(x, y, z, t) = x^4 y^4 z^4 t + \frac{1}{2} x^4 y^4 z^4 t^2, \\ u_3(x, y, z, t) = x^4 y^4 z^4 t + \frac{1}{2!} x^4 y^4 z^4 t^2 + \frac{1}{3!} x^4 y^4 z^4 t^3, \\ \vdots \end{cases}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= x^4 y^4 z^4 (t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots) \\ &= x^4 y^4 z^4 (e^t - 1), \end{aligned}$$

est la solution exacte de (1.50).

1.7.2 Equation des ondes

Exemple 1.16. *Considérons l'équation des ondes à un dimension avec les conditions initiales [74, 87]*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = x, & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x^2. \end{cases} \quad (1.51)$$

L'opérateur linéaire $L = \frac{d^2}{dt^2}$, alors $\lambda(s) = s - t$, et $u_0(x) = x + x^2t$, la formule d'itération pour (1.51) est la suivante

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t (s - t) \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial s^2}(x, s) - \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right] ds. \quad (1.52)$$

En conséquence, les approximations successives sont

$$\begin{cases} u_0(x, t) = x + x^2t, \\ u_1(x, t) = x + x^2t + \frac{1}{3!}x^2t^3, \\ u_2(x, t) = x + x^2t + \frac{1}{3!}x^2t^3 + \frac{1}{5!}x^2t^5, \\ u_3(x, t) = x + x^2t + \frac{1}{3!}x^2t^3 + \frac{1}{5!}x^2t^5 + \frac{1}{7!}x^2t^7, \\ \vdots \end{cases}$$

Finalement, la solution exacte de (1.51) est

$$\begin{aligned} u(x, t) &= x + x^2 \left(t + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \frac{1}{7!}t^7 + \dots \right) \\ &= x + x^2 \sinh t. \end{aligned}$$

Exemple 1.17. *Considérons l'équation à deux dimensions [74, 87]*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{12} \left(x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), & 0 < x, y < 1, t > 0, \\ u(x, y, 0) = x^4 & u_t(x, y, 0) = y^4. \end{cases} \quad (1.53)$$

Avec la même approche qu'auparavant, $\lambda(s) = s - t$, et $u_0(x) = x^4 + y^4t$, la formule d'itération pour (1.53) s'exprime par

$$u_{n+1}(x, y, t) = u_n(x, y, t) + \int_0^t (s - t) \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial s^2}(x, y, s) - \frac{1}{12} \left(x^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} \right) \right] ds.$$

Nous obtenons les approximations successives suivantes

$$\begin{cases} u_0(x, y, t) = x^4 + y^4 t, \\ u_1(x, y, t) = x^4 + y^4 t + \frac{1}{2!} x^4 t^2 + \frac{1}{3!} y^4 t^3, \\ u_2(x, y, t) = x^4 + y^4 t + \frac{1}{2!} x^4 t^2 + \frac{1}{3!} y^4 t^3 + \frac{1}{4!} x^4 t^4 + \frac{1}{5!} y^4 t^5, \\ \vdots \end{cases}$$

La solution exacte de (1.53) est

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= x^4 \left(1 + \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{4!} t^4 + \dots \right) + y^4 \left(t + \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{5!} t^5 + \dots \right) \\ &= x^4 \cosh t + y^4 \sinh t. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Méthode de perturbation homotopique (HPM)

2.1 Idées de base de la méthode (HPM)

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, nous considérons l'équation différentielle non linéaire suivante [13, 15, 33]

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega, \quad (2.1)$$

avec les conditions aux limites

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Gamma, \quad (2.2)$$

où A est un opérateur différentiel général, B est un opérateur de frontière, $f(r)$ est une fonction analytique, et Γ est la frontière du domaine Ω . De manière générale, l'opérateur A peut être divisé en deux parties L et N , où L est linéaire mais N est non linéaire. Par conséquent, l'équation (2.1) prend la forme suivante

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \quad (2.3)$$

En utilisant la technique d'homotopie, nous construisons

$$v(r; p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

qui satisfait

$$H(v; p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad r \in \Omega, \quad (2.5)$$

ou

$$H(v; p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, \quad r \in \Omega, \quad (2.6)$$

où $p \in [0, 1]$ est un paramètre d'intégration, u_0 est une approximation initiale pour la solution de l'équation (2.1), qui satisfait aux conditions aux limites. D'après les deux équations (2.5) et (2.6) nous aurons

$$\begin{cases} H(v; 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \\ H(v; 1) = A(v) - f(r) = 0 \end{cases} . \quad (2.7)$$

Le changement de processus de p de zéro à l'unité est celui de $v(r, p)$ de $u_0(r)$ à $u(r)$. Dans la topologie, cela s'appelle l'homotopie. Selon la méthode (HPM), nous pouvons utiliser le paramètre p comme un petit paramètre. Et supposons que la solution des équations (2.5) et (2.6) peut être écrite comme une série de puissances en p

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (2.8)$$

Pour $p = 1$, la solution de (2.1) est

$$u = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (2.9)$$

La méthode considère le terme non linéaire Nu comme

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n(u), \quad (2.10)$$

où H_n désignent les polynômes de He [28, 29] indiqué ci-dessous

$$H_n(u_0, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{+\infty} (p^i u_i) \right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

2.2 Exemples de calcul des polynômes de He

Exemple 2.1. *Considérons le terme non linéaire $N(u) = u^2$*

Soit

$$u(p) = \sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i, \quad (2.12)$$

donc

$$N(u(p)) = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} p^i H_i, \quad (2.13)$$

d'après (2.13), nous aurons

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i H_i = (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + p^4u_4 + \dots)^2, \quad (2.14)$$

pour $p = 0$

$$H_0 = u_0^2. \quad (2.15)$$

Avec la dérivée sur les deux côtés de (2.14) par rapport à p ,

$$\left. \frac{\partial(H_0 + pH_1)}{\partial p} \right|_{p=0} = \left. \frac{\partial(u_0 + pu_1)^2}{\partial p} \right|_{p=0},$$

la résolution de l'équation précédente, puis nous mettons $p = 0$

$$H_1 = 2u_0u_1. \quad (2.16)$$

De la même manière, si on prend la dérivée d'ordre deux sur les deux côtés de (2.14) par rapport à p ,

$$\left. \frac{\partial^2(H_0 + pH_1 + p^2H_2)}{\partial p^2} \right|_{p=0} = \left. \frac{\partial^2(u_0 + pu_1 + p^2u_2)^2}{\partial p^2} \right|_{p=0},$$

alors

$$H_2 = u_1^2 + 2u_0u_2, \quad (2.17)$$

comme ce qui précède, nous obtenons

$$\left. \frac{\partial^3(H_0 + pH_1 + p^2H_2 + p^3H_3)}{\partial p^3} \right|_{p=0} = \left. \frac{\partial^3(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3)^2}{\partial p^3} \right|_{p=0},$$

alors

$$H_3 = 2u_0u_3 + 2u_1u_2. \quad (2.18)$$

de la même manière

$$H_4 = 2u_0u_4 + u_2^2 + 2u_1u_3, \quad (2.19)$$

En suivant les mêmes étapes, nous obtenons H_5, H_6, \dots

Exemple 2.2. Considérons le terme non linéaire $N(u) = u^3$.

Nous prenons en considération (2.12) et (2.13), nous aurons

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i H_i = (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + p^4u_4 + \dots)^3. \quad (2.20)$$

Pour $p = 0$

$$H_0 = u_0^3. \quad (2.21)$$

L'utilisation de la dérivée sur les deux côtés de (2.20) par rapport à p , nous conduit a

$$\left. \frac{\partial(H_0 + pH_1)}{\partial p} \right|_{p=0} = \left. \frac{\partial(u_0 + pu_1)^3}{\partial p} \right|_{p=0},$$

la résolution de l'équation précédente par rapport à H_1 , nous donne

$$H_1 = 3u_1u_0^2. \quad (2.22)$$

De la même manière, la dérivée d'ordre deux sur les deux côtés de (2.20) par rapport à p , puis nous mettons $p = 0$, et par la résolution de l'équation par rapport à H_2 , nous avons

$$\left. \frac{\partial^2(H_0 + pH_1 + p^2H_2)}{\partial p^2} \right|_{p=0} = \left. \frac{\partial^2(u_0 + pu_1 + p^2u_2)^3}{\partial p^2} \right|_p = 0,$$

donc

$$H_2 = 3u_2u_0^2 + 3u_1^2u_0, \quad (2.23)$$

en suivant les mêmes étapes, nous obtenons

$$\left. \frac{\partial^3(H_0 + pH_1 + p^2H_2 + p^3H_3)}{\partial p^3} \right|_{p=0} = \left. \frac{\partial^3(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3)^3}{\partial p^3} \right|_{p=0},$$

alors

$$H_3 = 3u_3u_0^2 + 2u_2u_1u_0 + 4u_2u_1u_0 + u_1^2. \quad (2.25)$$

Avec la même procédure, nous obtenons H_4, H_5, \dots .

Exemple 2.3. Considérons le terme non linéaire $N(u) = u \cdot (u)_x$

D'après (2.13), nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i H_i = (u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + \dots) \cdot (u_{0x} + pu_{1x} + p^2 u_{2x} + p^3 u_{3x} + \dots). \quad (2.26)$$

Avec la même procédure, les premiers termes de la suite $H_n(u)$ des polynômes de He sont

$$\begin{aligned} H_0(u) &= u_0 u_{0x}, \\ H_1(u) &= u_0 u_{1x} + u_1 u_{0x}, \\ H_2(u) &= u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + u_2 u_{0x}. \end{aligned}$$

2.3 Convergence

En écrivant l'équation (2.6) sous la forme suivante

$$L(v) = L(u_0) + p[f(r) - N(v) - L(u_0)], \quad (2.27)$$

et appliquant formellement l'opérateur inverse, L^{-1} , des deux côtés de l'équation. (2.27), nous obtenons

$$v = u_0 + p \left[L^{-1} f(r) - L^{-1} N(v) - u_0 \right]. \quad (2.28)$$

Supposons que

$$v = \sum_{i=0}^{+\infty} p^i v_i. \quad (2.29)$$

En remplaçant (2.29) dans l'équation (2.28) l'équation (2.28) devient

$$\sum_{i=0}^{+\infty} p^i v_i = u_0 + p \left[L^{-1} f(r) - L^{-1} N\left(\sum_{i=0}^{+\infty} p^i v_i\right) - u_0 \right]. \quad (2.30)$$

Par identification des termes de mêmes puissances de p , nous obtenons

$$\begin{aligned} p^0 &: v_0 &= u_0, \\ p^1 &: v_1 &= L^{-1} f(r) - u_0 - L^{-1}(H_0), \\ p^2 &: v_2 &= -L^{-1}(H_1), \\ &&\vdots \\ p^{n+1} &: v_{n+1} &= -L^{-1}(H_n), \\ &&\vdots \end{aligned}$$

Pour l'étude de la convergence de la méthode (HPM), voici le théorème suivant [13, 16, 17].

Théorème 2.1. (*Condition de convergence suffisante.*) *Supposons que X et Y soient deux espaces de Banach et $N : X \rightarrow Y$ est une application non linéaire contractif, c'est-à-dire.*

$$\forall v, v^* \in X, \|N(v) - N(v^*)\| \leq \gamma \|v - v^*\|, 0 < \gamma < 1. \quad (2.31)$$

Alors, selon le théorème des points fixes de Banach, N a un unique point fixe u , soit $N(u) = u$. Supposons que la séquence générée par la méthode de perturbation homotopique puisse être écrite.

$$V_n = N(V_{n-1}), V_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i, \quad n = 1, 2, 3 \dots, \quad (2.32)$$

et suppose que

$$V_0 = v_0 \in B_r(u),$$

où

$$B_r(u) = \{u^* \in X, \|u - u^*\| < r\},$$

alors nous avons les relations suivantes

- (i) $\|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\|$
- (ii) $V_n \in B_r(u)$,
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = u$.

Preuve (i) Par approche inductive, pour $n = 1$ nous avons

$$\|V_1 - u\| = \|N(V_0) - N(u)\| \leq \gamma \|v_0 - u\|. \quad (2.33)$$

Supposons que

$$\|V_{n-1} - u\| \leq \gamma^{n-1} \|v_0 - u\|,$$

comme hypothèse d'induction, alors

$$\|V_n - u\| = \|N(V_{n-1}) - N(u)\| \leq \gamma \|V_{n-1} - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\|. \quad (2.34)$$

(ii) En utilisant (i), nous avons

$$\|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\| \leq \gamma^n r < r \Rightarrow V_n \in B_r(u). \quad (2.35)$$

(iii) Par

$$\|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\| \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n = 0,$$

il vient $\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n - u\| = 0$.

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = u. \quad \square$$

2.4 Application de la méthode (HPM) pour le problème de diffusion de la réaction de Cauchy

Les équations de diffusion des réactions décrivent une grande variété de systèmes non linéaires en physique, chimie, écologie, biologie et ingénierie [23, 44, 72]. Les équations de diffusion des réactions sont largement utilisées comme modèles d'effets spatiaux en écologie. Ils supportent trois types importants de phénomènes écologiques, l'existence d'une taille de patch minimale nécessaire au maintien d'une population, la propagation des fronts des ondes correspondant à des invasions biologiques et la formation de modèles spatiaux dans la répartition des populations dans des environnements homogènes. Les équations de diffusion des réactions peuvent être analysées à l'aide de méthodes de la théorie des équations différentielles et des systèmes dynamiques. Par diffusion de réaction, on a une équation de la forme suivante [86]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u, \nabla u; x, t). \quad (2.36)$$

Le terme Δu est le terme de diffusion et $f(u, \nabla u; x, t)$ est le terme de réaction. Plus généralement le terme de diffusion peut être de type $A(u)$, où A est un opérateur elliptique du second ordre, qui peut être non linéaire et dégénéré.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + r(x, t)u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (2.37)$$

où u est la concentration, r est le paramètre de réaction et $D > 0$ est le coefficient de diffusion, sous réserve des conditions initiales et aux limites

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.38)$$

$$u(0, t) = f_0(t), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = f_1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.39)$$

Le problème posé par les équations. (2.37) et (2.38) est appelé le problème caractéristique de Cauchy dans le domaine $D = R \times R_+$, tandis que le problème posé par les équations. (2.37) et (2.39) est appelé le problème non caractéristique de Cauchy dans le domaine $D = R_+ \times R$.

2.4.1 Solutions par la méthode (HPM)

Afin de résoudre les équations.(2.37) et (2.38) par la méthode (HPM), on choisit l'approximation initiale

$$u_0(x, t) = g(x), \quad (2.40)$$

et construire l'homotopie suivante

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, t) = p[D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) + r(x, t)v(x, t) - \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, t).] \quad (2.41)$$

Supposons la solution de Eq. (2.41) sous la forme

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (2.42)$$

En substituant Eq. (2.42) dans Eq. (2.41) et la collecte des termes du même puissance de p donne

$$p^0 \quad : \quad \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, \quad (2.43)$$

$$p^1 \quad : \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + r(x, t)v_0(x, t) - \frac{\partial u_0}{\partial t}, \quad (2.44)$$

$$p^2 \quad : \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + r(x, t)v_1(x, t), \quad (2.45)$$

$$\vdots \quad (2.46)$$

Nous commençons avec $v_0(x, t) = g(x)$, toutes les équations linéaires ci-dessus peuvent être facilement résolues, nous obtenons toutes les solutions. En mettant $p = 1$ dans Eq. (2.42) pour obtenir la solution de (2.41)

$$u = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (2.47)$$

2.4.2 Exemples illustratifs

Dans cette section, nous déterminons la fiabilité du (HPM) pour différents cas de $r(x, t)$.

Exemple 2.4. Cas $r = \text{constant}$. Prendre $D = 1$ et $r = -1$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - u(x, t), \quad (2.48)$$

sous réserve des conditions initiales et aux limites

$$u(x, 0) = e^{-x} + x, x \in \mathbb{R}, \quad (2.49)$$

$$u(0, t) = 1, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = e^{-t} - 1. \quad (2.51)$$

Selon les procédures précédentes de la méthode (HPM), nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} p^0 : v_0(x, t) &= e^{-x} + x, \\ p^1 : v_1(x, t) &= -tx, \\ p^2 : v_2(x, t) &= \frac{1}{2}t^2x, \\ p^3 : v_3(x, t) &= -\frac{1}{6}t^3x, \\ &\vdots \end{aligned}$$

L'expression de solutions en série par la méthode (HPM) peut être écrite sous la forme

$$u(x, t) = v_0(x, t) + v_1(x, t) + v_2(x, t) + v_3(x, t) + \dots \quad (2.52)$$

Ensuite, les solutions approximatives sous forme de série sont

$$u(x, t) = e^{-x} + x\left(1 - t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots\right) = e^{-x} + xe^{-t}, \quad (2.53)$$

qui est la solution exacte de (2.48)-(2.49).

Exemple 2.5. Cas $r = r(t)$. Prenant $D = 1$ et $r(t) = 2t$

Eq. (2.37) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + 2tu(x, t), \quad (2.54)$$

sous réserve des conditions initiales et limites

$$u(x, 0) = e^x, x \in \mathbb{R}, \quad (2.55)$$

$$u(0, t) = e^{t+t^2}, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = e^{t+t^2}. \quad (2.57)$$

Selon la méthode (HPM), nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} p^0 : v_0(x, t) &= e^x, \\ p^1 : v_1(x, t) &= e^x(t + t^2), \\ p^2 : v_2(x, t) &= e^x\left(\frac{t^2}{2} + t + \frac{t^4}{2}\right), \\ p^3 : v_3(x, t) &= e^x\left(\frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{2} + \frac{t^6}{6} + \dots\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ensuite

$$u(x, t) = e^x\left(1 + t + \frac{3t^2}{2!} + \frac{7t^3}{3!} + \dots\right) = e^{x+t+t^2}, \quad (2.58)$$

qui est la solution exacte de (2.54)-(2.57).

Exemple 2.6. Cas $r = r(x)$. Prendre $D = 1$ et $r(t) = -1 - 4x^2$

Eq. (2.37) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - (1 + 4x^2)u(x, t), \quad (2.59)$$

sous réserve des conditions initiales et aux limites

$$u(x, 0) = e^{x^2}, x \in \mathbb{R}, \quad (2.60)$$

$$u(0, t) = e^t, \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = 0. \quad (2.61)$$

Comme ce qui précède (2.43), nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} p^0 & : v_0(x, t) &= e^{x^2}, \\ p^1 & : v_1(x, t) &= e^{x^2} t, \\ p^2 & : v_2(x, t) &= e^{x^2} \frac{t^2}{2}, \\ p^3 & : v_3(x, t) &= e^{x^2} \frac{t^3}{6}, \\ & & \vdots \end{aligned}$$

Par suite, la solution exacte des équations (2.59-2.61) est

$$u(x, t) = e^{x^2} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = e^{x^2+t}, \quad (2.62)$$

Exemple 2.7. Cas $r = r(x, t)$. Finalement, prenant $D = 1$ et $r(x, t) = -4x^2 + 2t - 2$

Eq (2.37) formulé comme

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - (4x^2 - 2t + 2)u(x, t), \quad (2.63)$$

sous réserve des conditions initiales et aux limites

$$u(x, 0) = e^{x^2}, x \in \mathbb{R}, \quad (2.64)$$

$$u(0, t) = e^{t^2}, \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = 0. \quad (2.66)$$

De la même manière (2.43), nous obtenons les approximations successives

$$\begin{aligned} p^0 & : v_0(x, t) &= e^{x^2}, \\ p^1 & : v_1(x, t) &= e^{x^2} t^2, \\ p^2 & : v_2(x, t) &= e^{x^2} \frac{t^4}{2}, \\ p^3 & : v_3(x, t) &= e^{x^2} \frac{t^6}{6}, \\ & & \vdots \end{aligned}$$

Ensuite, la solution exacte des équations (2.63)-(2.66) est

$$u(x, t) = e^{x^2} \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \dots \right) = e^{x^2+t^2}.$$

2.5 Application de la méthode (HPM) aux équations de Klein – Gordon

Nous considérons les équations de Klein – Gordon [22, 89]

$$u_{tt} - u_{xx} + b_1u + b_2g(u) = f(x, t), \quad (2.67)$$

où u est une fonction de x et t , g est une fonction non linéaire, et f est une fonction analytique connue. Afin d'évaluer à la fois l'applicabilité et la précision de la procédure méthode décrite dans ce chapitre, certains tests des exemples sont considérés.

2.5.1 Exemples illustratifs

Exemple 2.8. *Considérons d'abord l'équation linéaire de Klein-Gordon*

$$u_{tt} - u_{xx} = u, \quad (2.68)$$

avec les conditions initiales

$$u_0(x, 0) = 1 + \sin x, \quad (u_0)_t(x, 0) = 0. \quad (2.69)$$

Nous construisons une homotopie qui satisfait la relation

$$v_{tt} - (u_0)_{tt} + p[(u_0)_{tt} - v_{xx} - v] = 0. \quad (2.70)$$

Maintenant, substituant Eq. (2.28) dans l'équation. (2.70) et (2.69) et en assimilant les coefficients de puissance similaire de p , nous obtenons le système

$$(v_0)_{tt} - (u_0)_{tt} = 0, \quad v_0(x, 0) = 1 + \sin x, \quad (v_0)_t(x, 0) = 0, \quad (2.71)$$

$$(v_1)_{tt} + (u_0)_{tt} - (v_0)_{xx} - v_0 = 0, \quad v_1(x, 0) = 0, \quad (v_1)_t(x, 0) = 0, \quad (2.72)$$

$$(v_2)_{tt} - (v_1)_{xx} - v_1 = 0, \quad v_2(x, 0) = 0, \quad (v_2)_t(x, 0) = 0, \quad (2.73)$$

$$(v_3)_{tt} - (v_2)_{xx} - v_2 = 0, \quad v_3(x, 0) = 0, \quad (v_3)_t(x, 0) = 0, \quad (2.74)$$

etc. Ainsi, la résolution des équations. (2.71)-(2.74) donne

$$\begin{aligned}
 p^0 & : v_0(x, t) &= 1 + \sin x, \\
 p^1 & : v_1(x, t) &= \frac{1}{2}t^2, \\
 p^2 & : v_2(x, t) &= \frac{1}{24}t^4, \\
 p^3 & : v_3(x, t) &= \frac{1}{720}t^6, \\
 & & \vdots
 \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution de série approximative à 4 termes est

$$u(x, t) = \sin x + 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{720}t^6, \quad (2.75)$$

et cela aboutit, dans la limite d'une infinité de termes la solution exacte de (2.68) -(2.69)

$$u(x, t) = \sin x + \cos ht. \quad (2.76)$$

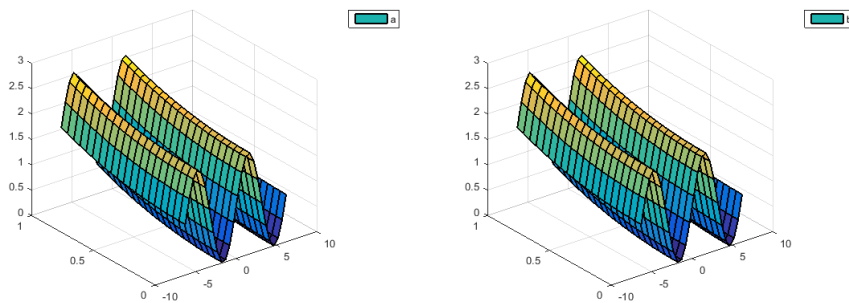


FIGURE 2.1 – Le comportement de la solution exacte (a) et la solution approximative (b) pour $0 \leq t \leq 1$. et $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

Exemple 2.9. *Considérons l'équation de Klein-Gordon non homogène linéaire*

$$u_{tt} - u_{xx} - 2u = -2 \sin x \sin t, \quad (2.77)$$

et conditions initiales

$$u_0(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin x. \quad (2.78)$$

Maintenant, nous construisons une homotopie qui satisfait la relation suivante

$$v_{tt} - (u_0)_{tt} + p[(u_0)_{tt} - v_{xx} - 2v + 2 \sin x \sin t] = 0. \quad (2.79)$$

Substituant l'équation (2.28) dans l'équation (2.79) et (2.78) et en égalisant les coefficients de même puissance de p , nous obtenons un système de

$$(v_0)_{tt} - (u_0)_{tt} = 0, \quad v_0(x, 0) = 0, \quad (v_0)_t(x, 0) = \sin x, \quad (2.80)$$

$$(v_1)_{tt} + (u_0)_{tt} - (v_0)_{xx} - 2v_0 + 2 \sin x \sin t = 0, \quad v_1(x, 0) = 0, \quad (v_1)_t(x, 0) = 0, \quad (2.81)$$

$$(v_2)_{tt} - (v_1)_{xx} - 2v_1 = 0, \quad v_2(x, 0) = 0, \quad (v_2)_t(x, 0) = 0, \quad (2.82)$$

$$(v_3)_{tt} - (v_2)_{xx} - 2v_2 = 0, \quad v_3(x, 0) = 0, \quad (v_3)_t(x, 0) = 0, \quad (2.83)$$

$$(v_4)_{tt} - (v_3)_{xx} - 2v_3 = 0, \quad v_4(x, 0) = 0, \quad (v_4)_t(x, 0) = 0, \quad (2.84)$$

\vdots

La résolution des équations (2.80) -(2.84), nous donne

$$v_0(x, t) = t \sin x, \quad (2.85)$$

$$v_1(x, t) = -\sin x \left(\frac{-1}{6} t^3 - 2 \sin t \right) - 2t \sin x, \quad (2.86)$$

$$v_2(x, t) = \frac{1}{6} \sin x \left(\frac{1}{20} t^5 - 12 \sin t - 2t^3 \right) + 2t \sin x, \quad (2.87)$$

$$v_3(x, t) = \frac{1}{120} \sin x \left(\frac{1}{42} t^7 + 240 \sin t - 2t^5 + 40t^3 \right) - 2t \sin x, \quad (2.88)$$

$$v_4(x, t) = \frac{1}{5040} \sin x \left(\frac{1}{72} t^9 - 10080 \sin t - 2t^7 + 84t^5 - 1680t^3 \right) + 2t \sin x. \quad (2.89)$$

Par conséquent, la solution de série approximative à 5 termes est,

$$u(x, t) \simeq \sin x \left(t - \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{120} t^5 - \frac{1}{5040} t^7 + \frac{1}{362880} t^9 \right), \quad (2.90)$$

et cela aboutit, dans la limite d'une infinité de termes, la solution exacte

$$u(x, t) = \sin x \cdot \sin t. \quad (2.91)$$

Exemple 2.10. Ensuite, nous considérons l'équation non linéaire de Klein-Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} + u^2 = -x \cos t + x^2 \cos^2 t, \quad (2.92)$$

avec les conditions initiales

$$u_0(x, 0) = x, \quad (u_0)_t(x, 0) = 0. \quad (2.93)$$

Nous construisons l'homotopie suivante

$$v_{tt} - (u_0)_{tt} + p[(u_0)_{tt} - v_{xx} + v^2 + x \cos t - x^2 \cos^2 t] = 0. \quad (2.94)$$

Substitution de l'équation (2.28) en équations (2.94) et (2.93) et en égalisant les coefficients de même puissance de p , nous obtenons le système

$$(v_0)_{tt} - (u_0)_{tt} = 0, \quad v_0(x, 0) = x, \quad (v_0)_t(x, 0) = 0, \quad (2.95)$$

$$(v_1)_{tt} + (u_0)_{tt} - (v_0)_{xx} + (v_0)^2 + x \cos t - x^2 \cos^2 t = 0, \quad v_1(x, 0) = 0, \quad (v_1)_t(x, 0) = 0, \quad (2.96)$$

$$(v_2)_{tt} - (v_1)_{xx} + 2v_0v_1 = 0, \quad v_2(x, 0) = 0, \quad (v_2)_t(x, 0) = 0. \quad (2.97)$$

$$(v_3)_{tt} - (v_2)_{xx} + 2v_0v_2 + (v_1)^2 = 0, \quad v_3(x, 0) = 0, \quad (v_3)_t(x, 0) = 0. \quad (2.98)$$

⋮

On peut prendre l'approximation initiale $v_0 = x \cos t$. la résolution des équations.(2.95) - (2.99) donne

$$v_0(x, t) = x \cos t, \quad v_1(x, t) = 0, \quad v_2(x, t) = 0, \quad (2.99)$$

De même, les solutions d'ordre supérieur sont également nulles, ce qui donne alors la solution exacte

$$u(x, t) = x \cos t.$$

Chapitre 3

Equations de Newell-Whitehead-Segel par la méthode (HPTM)

3.1 Introduction

Les équations de Newell-Whitehead-Segel sont largement applicables en génie mécanique et chimie, en écologie, en biologie et en ingénierie. L'équation de Newell-Whitehead-Segel (NWS) est résolue en utilisant les méthodes de décomposition d'Adomian et de quasi-interpolation multiquadratique [27], une solution approximative à l'équation de Newell-Whitehead-Segel par la méthode de décomposition d'Adomian [45], la méthode de perturbation homotopique [53], nouvelle méthode itérative [60], la méthode d'itération variationnelle [61], la méthode de décomposition d'Adomian et de Laplace [62], une comparaison entre la méthode de transformation différentielle réduite et la décomposition d'Adomian [66].

Dans ce chapitre, différents types d'équations non linéaires de Newell-Whitehead-Segel sont résolues par la méthode de transformation de perturbation homotopique (HPTM) qui est introduite par Khan et Wu [40] en combinant la méthode de perturbation homotopique [17, 33] et la méthode de transformation de **Laplace**¹ [voir l'annexe].

1. **Laplace** : Pierre-Simon Laplace (23 mars 1749 – 5 mars 1827) est un mathématicien, astronome, physicien et homme politique français.

Le modèle d'équations de Newell-Whitehead-Segel [90], s'écrit comme suit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + au(x, t) - bu^m(x, t), \quad (3.1)$$

$u(x, t)$ est une fonction de la variable spatiale x et la variable temporelle t avec $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$. La fonction $u(x, t)$ peut être considérée comme la distribution non linéaire de la température dans une tige infiniment mince et longue ou comme vitesse d'écoulement d'un fluide dans un tuyau infiniment long de petit diamètre, a, b et k sont des nombres réels avec $k > 0$ et m est un entier positif

3.2 Analyse de la méthode de transformation de perturbation homotopique (HPTM)

Pour illustrer l'idée de base de (HPTM) [40], nous considérons l'équation différentielle non linéaire générale avec les conditions initiales de la forme

$$\begin{aligned} Du(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) &= g(x, t), \\ u(x, 0) &= h(x), u_t(x, 0) = f(x), \end{aligned} \quad (3.2)$$

où D est un opérateur différentiel linéaire du second ordre $D = \partial^2/\partial t^2$, R un opérateur linéaire d'ordre inférieur à celui de D , N est un opérateur non linéaire et $g(x, t)$ est le terme source. Prenant la transformation de Laplace notée par L des deux côtés de l'équation (3.2)

$$L[Du(x, t)] + L[Ru(x, t)] + L[Nu(x, t)] = L[g(x, t)]. \quad (3.3)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$L[u(x, t)] = \frac{h(x)}{s} + \frac{f(x)}{s^2} - \frac{1}{s^2}L[Ru(x, t)] + \frac{1}{s^2}L[g(x, t)] - \frac{1}{s^2}L[Nu(x, t)]. \quad (3.4)$$

En appliquons l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation(3.4), nous donne

$$u(x, t) = G(x, t) - L^{-1} \left[\frac{1}{s^2}L [Ru(x, t) + Nu(x, t)] \right], \quad (3.5)$$

où $G(x, t)$ représente le terme découlant du terme source et des conditions initiales prescrites. Nous appliquons maintenant la méthode (HPM). Notons par

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t), \quad (3.6)$$

la solution cherchée.

Posons

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n(u), \quad (3.7)$$

où $H_n(u)$ désignent les polynômes de He [28, 29], qui sont donnés par

$$H_n(u_0, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{+\infty} (p^i u_i) \right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

En remplaçant les équations (3.6), (3.7) dans l'équation (3.5), il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) = G(x, t) - p \left(L^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L \left[R \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) \right) + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n(u) \right] \right] \right) \quad (3.9)$$

qui est la combinaison de la méthode de perturbation homotopique (HPM) et de la transformation de Laplace par utilisation des polynômes de He (HPTM). Par identification des termes de mêmes puissances de p , nous obtenons les approximations suivantes

$$\begin{aligned} p^0 & : u_0(x, t) = G(x, t), \\ p^1 & : u_1(x, t) = -L^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L [Ru_0(x, t) + H_0(u)] \right], \\ p^2 & : u_2(x, t) = -L^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L [Ru_1(x, t) + H_1(u)] \right], \\ p^3 & : u_3(x, t) = -L^{-1} \left[\frac{1}{s^2} L [Ru_2(x, t) + H_2(u)] \right], \\ & \vdots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Enfin, la solution est

$$u(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{i=0}^{+\infty} p^i u_i(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots \quad (3.11)$$

Pour des calculs numériques ultérieurs, les expressions

$$\psi_n(x, t) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i(x, t)$$

et

$$|u(x, t) - \psi_n(x, t)|$$

désignent pour $n \geq 1$, respectivement l'approximation et l'erreur absolue à l'ordre n de $u(x, t)$.

3.3 Résultats numériques

Pour illustrer l'exactitude et l'efficacité de la présente méthode, plusieurs exemples de test sont considérés dans cette section.

Exemple 3.1. *Considérons l'équation (NWS) si $k = 5$, $a = 2$, $b = -1$ et $m = 2$*

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 5 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 2u(x, t) + u^2(x, t), \quad (3.12)$$

et la condition initiale

$$u(x, 0) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés, sous réserve de la condition initiale, nous avons

$$L[u(x, t)] = \frac{\alpha}{s} + \frac{1}{s} L[5u_{xx} + 2u + u^2]. \quad (3.14)$$

En prenant la transformation inverse de Laplace, nous obtenons

$$u(x, t) = \alpha + pL^{-1} \left[\frac{1}{s} L[5u_{xx} + 2u + u^2] \right]. \quad (3.15)$$

Par la méthode (HPM), nous avons

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t). \quad (3.16)$$

En substituant Eq. (3.16) dans Eq. (3.15), nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) = \alpha + pL^{-1} \left\{ \frac{1}{s} L \left[\begin{array}{l} 5 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) \right)_{xx} \\ + 2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) \right) \\ + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n(u) \right) \end{array} \right] \right\}.$$

Où H_n sont des polynômes de He qui représentent les termes non linéaires, les premiers termes de la suite $H_n(u)$ des polynômes de He sont

$$\begin{aligned} H_0(u) &= u_0^2, \\ H_1(u) &= 2u_0u_1, \\ H_2(u) &= 2u_0u_2 + u_1^2, \\ H_3(u) &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Par identification des termes de mêmes puissances de p , nous avons

$$\begin{aligned} p^0 &: u_0(x, t) = \alpha, \\ p^1 &: u_1(x, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L [5(u_0)_{xx} + 2u_0 + H_0(u)] \right] \\ &= \alpha(\alpha + 2)t, \\ p^2 &: u_2(x, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L [5(u_1)_{xx} + 2u_1 + H_1(u)] \right] \\ &= \alpha(\alpha + 2)(\alpha + 1)t^2, \\ p^3 &: u_3(x, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L [5(u_2)_{xx} + 2u_2 + H_2(u)] \right] \\ &= 2\alpha(\alpha + 2)(\alpha + 1)^2 \frac{t^3}{3}, \\ p^4 &: u_4(x, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L [5(u_3)_{xx} + 2u_3 + H_3(u)] \right] \\ &= \alpha(\alpha + 2)(\alpha + 1)(5\alpha^2 + 10\alpha + 2) \frac{t^4}{6}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

La solution approximative de l'équation (3.12)-(3.13) est telle que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \alpha + \alpha(\alpha + 2)t + \alpha(\alpha + 2)(\alpha + 1)t^2 + 2\alpha(\alpha + 2)(\alpha + 1)^2 \frac{t^3}{3} \\ &\quad + \alpha(\alpha + 2)(\alpha + 1)(5\alpha^2 + 10\alpha + 2) \frac{t^4}{6} + \dots \end{aligned}$$

La solution exacte est la suivante [60]

$$u(x, t) = \frac{2\alpha e^{2t}}{2 + \alpha(1 - e^{2t})}. \quad (3.17)$$

Exemple 3.2. Considérons l'équation (NWS) si $k = 1$, $a = 2$, $b = 3$ et $m = 2$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 2u(x, t) - 3u^2(x, t), \quad (3.18)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Comme précédemment, en prenant la transformation inverse de Laplace, nous trouvons

$$u(x, t) = \beta + pL^{-1} \left[\frac{1}{s} L[u_{xx} + 2u - 3u^2] \right]. \quad (3.20)$$

En appliquant la méthode (HPTM), sous réserve des conditions initiales, nous avons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) = \beta + pL^{-1} \left\{ \frac{1}{s} L \left[\begin{array}{l} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) \right)_{xx} \\ + 2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) \right) \\ - 3 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) \right)^2 \end{array} \right] \right\}.$$

Par identification des termes de mêmes puissances de p , nous avons

$$\begin{aligned} p^0 & : u_0(x, t) = \beta, \\ p^1 & : u_1(x, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[(u_0)_{xx} + 2u_0 - 3u_0^2 \right] \right] \\ & = \beta (2 - 3\beta) t, \\ p^2 & : u_2(x, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[(u_1)_{xx} + 2u_1 - 6u_0 u_1 \right] \right] \\ & = 2\beta (2 - 3\beta) (1 - 3\beta) \frac{t^2}{2}, \\ p^3 & : u_3(x, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[(u_2)_{xx} + 2u_2 - 6u_0 u_2 - 3u_1^2 \right] \right] \\ & = 2\beta (2 - 3\beta) (27\beta^2 - 18\beta + 2) \frac{t^3}{3!}, \\ & \vdots \end{aligned}$$

Enfin, la solution exacte est la même que celle obtenue par [53, 60]

$$\begin{aligned} u(x, t) & = \beta + \beta (2 - 3\beta) t + 2\beta (2 - 3\beta) (1 - 3\beta) \frac{t^2}{2} \\ & + 2\beta (2 - 3\beta) (27\beta^2 - 18\beta + 2) \frac{t^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{-2\beta e^{2t}}{-2 + 3\beta(1 - e^{2t})}.$$

Exemple 3.3. Considérons l'équation (NWS) si $k = 1$, $a = 1$, $b = 1$ et $m = 2$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t) - u^2(x, t), \quad (3.21)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}\right)^2}. \quad (3.22)$$

En appliquant la méthode (HPTM) sous réserve de la condition initiale, nous avons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}\right)^2} + pL^{-1} \left\{ \frac{1}{s} L \left[\begin{array}{l} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t)\right)_{xx} \\ + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t)\right) \\ - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t)\right)^2 \end{array} \right] \right\}.$$

Par identification des termes de mêmes puissances de p , nous obtenons

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, t) &= \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}\right)^2}, \\ p^1 : u_1(x, t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[(u_0)_{xx} + u_0 - u_0^2 \right] \right] \\ &= \frac{5}{3} \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}}{\left(1 + e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}\right)^3} t, \\ p^2 : u_2(x, t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[(u_1)_{xx} + u_1 - 2u_0 u_1 \right] \right] \\ &= \frac{25}{36} \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{6}}} \left(2e^{\frac{x}{\sqrt{6}}} - 1\right)}{\left(1 + e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}\right)^4} t^2, \\ p^3 : u_3(x, t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[(u_2)_{xx} + u_2 - 2u_0 u_2 - u_1^2 \right] \right] \\ &= \frac{125}{648} \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{6}}} \left(4e^{\frac{2x}{\sqrt{6}}} - 7e^{\frac{x}{\sqrt{6}}} + 1\right)}{\left(1 + e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}\right)^5} t^3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

La solution en série de (3.21)-(3.22) est la suivante

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}\right)^2} + \frac{5}{3} \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}}{\left(1 + e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}\right)^3} t \\
 &\quad + \frac{25}{36} \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{6}}} \left(2e^{\frac{x}{\sqrt{6}}} - 1\right)}{\left(1 + e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}\right)^4} t^2 \\
 &\quad + \frac{125}{648} \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{6}}} \left(4e^{\frac{2x}{\sqrt{6}}} - 7e^{\frac{x}{\sqrt{6}}} + 1\right)}{\left(1 + e^{\frac{x}{\sqrt{6}}}\right)^5} t^3 + \dots \\
 &= \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{5t}{6}}\right)^2}.
 \end{aligned}$$

La solution exacte est la même que celle obtenue par [53, 61].

Tableau 3.1 : Comparaison entre la solution exacte et ψ_4 pour $t = 0.01$ dans l'exemple 3.3.

x	Valeur exacte	ψ_4	$ u - \psi_4 $
-20	9.99476799E-1	9.99476800E-1	1.11679902E-9
-10	9.69673588E-1	9.69673631E-1	4.29068732E-8
-5	7.97929279E-1	7.97929085E-1	1.93993830E-7
0	2.71254811E-1	2.71255305E-1	4.93486634E-7
5	1.53001105E-2	1.52999789E-2	1.31618083E-7
10	3.24044532E-4	3.24036591E-4	7.94194895E-9
20	9.55244894E-8	9.55218070E-8	2.68256912E-12

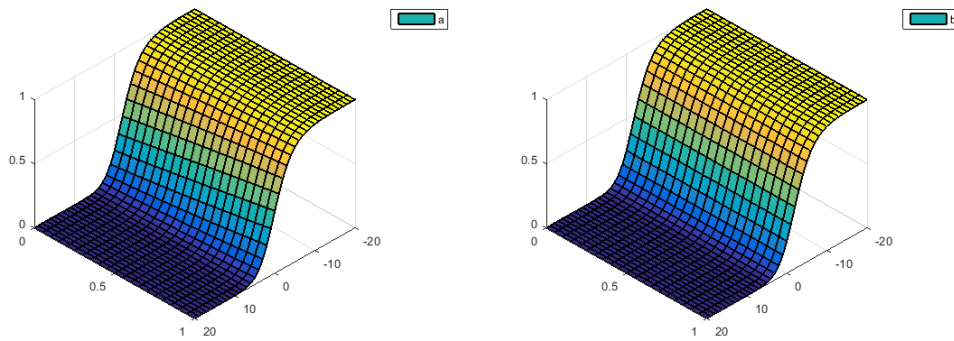


FIGURE 3.1 – Le comportement de la solution exacte (a), et la solution approximative (b) pour $-20 \leq x \leq 20$ et $0 \leq t \leq 1$.

Exemple 3.4. Considérons l'équation (NWS) si $k = 1$, $a = 1$, $b = 1$ et $m = 4$ et la condition initiale

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t) - u^4(x, t), \quad (3.23)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}\right)^{\frac{2}{3}}}. \quad (3.24)$$

En appliquant la méthode (HPTM), nous avons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}\right)^{\frac{2}{3}}} + pL^{-1} \left\{ \frac{1}{s} L \left[\begin{array}{l} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t)\right)_{xx} \\ + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t)\right) \\ - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n(u)\right) \end{array} \right] \right\},$$

où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n(u) = u^4.$$

Les premiers termes de la suite $H_n(u)$ des polynômes de He sont

$$\begin{aligned} H_0(u) &= u_0^4, \\ H_1(u) &= 4u_0^3 u_1, \\ H_2(u) &= 2u_0^2(2u_0 u_2 + u_1^2) + 4u_0^2 u_1^2. \end{aligned}$$

Par identification des termes de mêmes puissances de p , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 p^0 : u_0(x, t) &= \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}\right)^{\frac{2}{3}}}, \\
 p^1 : u_1(x, t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{s} L[(u_0)_{xx} + u_0 - H_0(u)] \right] \\
 &= \frac{7}{5} \frac{e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}}{\left(1 + e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}\right)^{\frac{5}{3}}} t, \\
 p^2 : u_2(x, t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{s} L[(u_1)_{xx} + u_1 - H_1(u)] \right] \\
 &= \frac{49}{100} \frac{e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}} \left(2e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}} - 3\right)}{\left(1 + e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}\right)^{\frac{8}{3}}} t^2, \\
 p^3 : u_3(x, t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{s} L[(u_2)_{xx} + u_2 - H_2(u)] \right] \\
 &= \frac{343}{3000} \frac{e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}} \left(4e^{\frac{6x}{\sqrt{10}}} - 27e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}} + 9\right)}{\left(1 + e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}\right)^{\frac{11}{3}}} t^3.
 \end{aligned}$$

Les autres termes peuvent être déterminés de manière similaire. La solution approximative à 4 termes de l'équation (3.23) - (3.24) est donnée par

$$\begin{aligned}
 \psi_4(x, t) &= \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}\right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{7}{5} \frac{e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}}{\left(1 + e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}\right)^{\frac{5}{3}}} t \\
 &+ \frac{49}{100} \frac{e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}} \left(2e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}} - 1\right)}{\left(1 + e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}\right)^{\frac{8}{3}}} t^2 \\
 &+ \frac{343}{3000} \frac{e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}} \left(4e^{\frac{6x}{\sqrt{10}}} - 27e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}} + 9\right)}{\left(1 + e^{\frac{3x}{\sqrt{10}}}\right)^{\frac{11}{3}}} t^3.
 \end{aligned}$$

La solution exacte est la suivante [53, 61].

$$u(x, t) = \left\{ \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{-3}{2\sqrt{10}} \left(x - \frac{7t}{\sqrt{10}} \right) \right) + \frac{1}{2} \right\}^{\frac{2}{3}}.$$

Tableau 3.2 : Erreur absolue $|u - \psi_4|$ pour l'exemple 3.4

x	$ u - \psi_4 $ $t = 0.1$	$ u - \psi_4 $ $t = 0.3$	$ u - \psi_4 $ $t = 0.5$
0	1.221229E-4	3.022038E-3	1.245533E-2
0.2	1.328287E-4	3.415236E-3	1.462723E-2
0.4	1.352957E-4	3.602846E-3	1.597269E-2
0.6	1.296021E-4	3.570756E-3	1.636664E-2
0.8	1.168616E-4	3.333532E-3	1.580592E-2
1	9.893015E-5	2.929772E-3	1.440339E-2

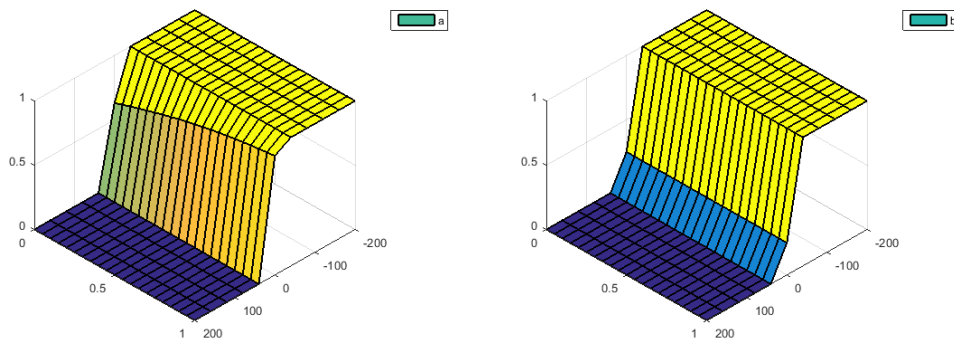


FIGURE 3.2 – Le comportement de la solution exacte (a) et la solution approximative (b) pour $-200 \leq x \leq 200$ et $0 \leq t \leq 1$.

Exemple 3.5. Considérons l'équation (NWS) si $k = 1$, $a = 3$, $b = 4$ et $m = 1$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 3u(x, t) - 4u^3(x, t), \quad (3.25)$$

sous réserve de l'état initial

$$u(x, 0) = \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{e^{\sqrt{6}x}}{e^{\sqrt{6}x} + e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}}. \quad (3.26)$$

Selon les procédures de la méthode (HPTM), nous avons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) = \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{e^{\sqrt{6}x}}{e^{\sqrt{6}x} + e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}} + pL^{-1} \left\{ \frac{1}{s} L \left[\begin{array}{l} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) \right)_{xx} \\ +3 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) \right) \\ -4 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n(u) \right) \end{array} \right] \right\},$$

où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n(u) = u^3.$$

Par identification des termes de mêmes puissances de p , les approximations successives sont

$$p^0 : u_0(x, t) = \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{e^{\sqrt{6}x}}{e^{\sqrt{6}x} + e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}},$$

$$\begin{aligned} p^1 : u_1(x, t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[(u_0)_{xx} + 3u_0 - 4u_0^3 \right] \right] \\ &= \frac{9}{2} \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{e^{\sqrt{6}x} e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}}{\left(e^{\sqrt{6}x} + e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x} \right)^2} t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^2 : u_2(x, t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[(u_1)_{xx} + 3u_1 - 12u_0^2 u_1 \right] \right] \\ &= \frac{81}{8} \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{e^{\sqrt{6}x} e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x} \left(-e^{\sqrt{6}x} + e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x} \right)}{\left(e^{\sqrt{6}x} + e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x} \right)^3} t^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^3 : u_3(x, t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[(u_2)_{xx} + 3u_2 - 4u_0(2u_0 u_2 + u_1^2) - 8u_0 u_1^2 - 4u_2 u_0^2 \right] \right] \\ &= \frac{243}{48} \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{e^{\sqrt{6}x} e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x} \left(-4e^{\sqrt{6}x} + e^{2\sqrt{6}x} + e^{\sqrt{6}x} \right)}{\left(e^{\sqrt{6}x} + e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x} \right)^4} t^3, \end{aligned}$$

⋮

La solution sous forme de série est donnée par

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{e^{\sqrt{6}x}}{e^{\sqrt{6}x} + e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}} + \frac{9}{2} \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{e^{\sqrt{6}x} e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}}{\left(e^{\sqrt{6}x} + e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}\right)^2} t \\
 &+ \frac{81}{8} \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{e^{\sqrt{6}x} e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x} \left(-e^{\sqrt{6}x} + e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}\right)}{\left(e^{\sqrt{6}x} + e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}\right)^3} t^2 \\
 &+ \frac{243}{48} \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{e^{\sqrt{6}x} e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x} \left(-4e^{\sqrt{6}x} + e^{2\sqrt{6}x} + e^{\sqrt{6}x}\right)}{\left(e^{\sqrt{6}x} + e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}\right)^4} t^3 + \dots \\
 &= \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{e^{\sqrt{6}x}}{e^{\sqrt{6}x} + e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x - \frac{9}{2}t\right)}}.
 \end{aligned}$$

La solution est identique à celle présentée dans [53].

Tableau 3.3 : Comparaison de la solution exacte et de ψ_4 pour des temps différents lorsque $x = 1$ dans l'exemple 3.5

t	Valeur exacte	ψ_4	$ u - \psi_4 $
0	6.693489E-1	6.693489E-1	0
0.1	7.293730E-1	7.292306E-1	1.424098E-4
0.2	7.736076E-1	7.715752E-1	2.032386E-3
0.3	8.047268E-1	7.956462E-1	9.080522E-3
0.4	8.259108E-1	8.007073E-1	2.520344E-2
0.5	8.400105E-1	7.860220E-1	5.398846E-2

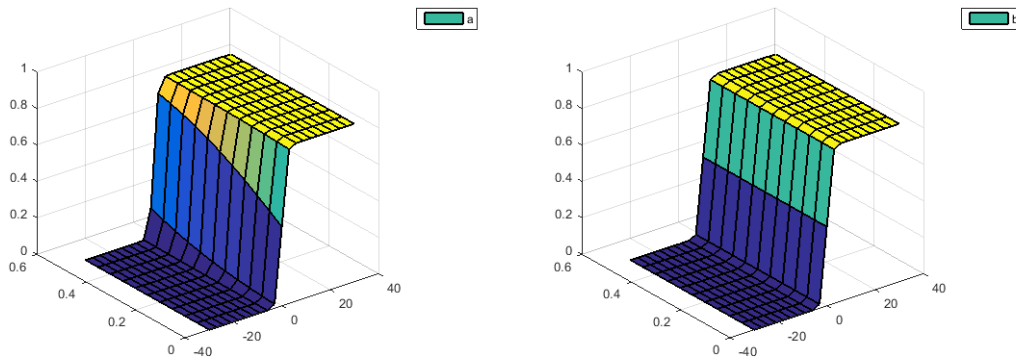


FIGURE 3.3 – Le comportement de la solution exacte (*a*) et la solution approximative (*b*) pour $-30 \leq x \leq 30$ et $0 \leq t \leq 0.5$

On peut observer à travers ces tableaux [1-3] et les figures [1-3] que cette méthode est efficace et précise pour différentes valeurs de temps et de lieu.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode de transformation de perturbation homotopique (HPTM) est appliquée avec succès pour résoudre les équations de Newell-Whitehead-Segel. Il convient de mentionner que les termes non linéaires peuvent être facilement manipulés en utilisant les polynômes de He. Ce qui réduit le travail de calcul par rapport aux autres méthodes, sans utiliser la discrétisation, la linéarisation ou les hypothèses restrictives, tout en conservant la vitesse de convergence et la précision de cette méthode.

Chapitre 4

Equations à plusieurs dimensions de Navier Stokes. Solutions exactes et numériques par la méthode (HPTM)

4.1 Introduction

Le modèle de l'équation de Navier Stokes (NS) pour un écoulement de fluide incompressible est donné comme suit [19, 50].

$$\begin{cases} U_t + (U \cdot \nabla) U = \rho_0 \nabla^2 U - \frac{1}{\rho} \nabla p, & \text{on } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot U = 0, & \text{on } \Omega \times (0, T) \\ U = 0, & \text{on } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (4.1)$$

Où $U = (u, v, w)$, t , p , dénote le vecteur fluide au point $(x; y; z)$, le temps et la pression, respectivement, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $\partial\Omega$ sa frontière, ρ est la densité, ρ_0 désigne la viscosité cinématique de l'écoulement.

En coordonnées cartésiennes, l'équation (3D) de Navier-Stokes devient

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_y + ww_z = \rho_0 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - \frac{1}{\rho} p_x \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z = \rho_0 (v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) - \frac{1}{\rho} p_y \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z = \rho_0 (w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}) - \frac{1}{\rho} p_z \end{cases} \quad (4.2)$$

Récemment, une attention considérable a été portée à l'étude de sa solution en utilisant diverses techniques numériques telles que la méthode de décompo-

sition d'Adomian [9, 50], la méthode de transformation différentielle réduite fractionnaire [19], solution de l'équation de Navier-Stokes fractionnée dans le temps en utilisant la méthode d'analyse par homotopie [64], la méthode de décomposition de Laplace modifiée [43], Nouvelle méthode de transformation de perturbation [25], la méthode de perturbation homotopique [78], la méthode locale Petrov-Galerkin sans maille [77].

Le but de ce chapitre est de trouver la solution numérique pour les équations de Navier-Stokes à deux dimensions (2D) et à trois dimensions (3D) en coordonnées cartésiennes en utilisant la méthode de transformation de perturbation homotopique (HPTM). Qui à été étudié et utilisé au chapitre 3.

4.2 Exemples illustratifs

Dans ce chapitre, trois exemples illustrent la méthode (HPTM) présentée dans le chapitre 3.

Exemple 4.1. *Considérons les équations à deux dimensions (2D) de Navier-Stokes [9, 19]*

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_y = \rho_0 (u_{xx} + u_{yy}) \\ v_t + uv_x + vv_y = \rho_0 (v_{xx} + v_{yy}) \end{cases}, \quad (4.3)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = u_0(x, y, t) = -\sin(x + y) \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y, t) = \sin(x + y) \end{cases}. \quad (4.4)$$

En prenons la transformation inverse de Laplace dans l'équation ci-dessus (4.3), nous obtenons

$$\begin{cases} u(x, y, t) = -\sin(x + y) + pL^{-1} \left[\frac{1}{s} L [\rho_0 (u_{xx} + u_{yy}) - (uu_x + vv_y)] \right] \\ v(x, y, t) = \sin(x + y) + pL^{-1} \left[\frac{1}{s} L [\rho_0 (v_{xx} + v_{yy}) - (uv_x + vv_y)] \right] \end{cases}. \quad (4.5)$$

En appliquant la méthode (HPTM), sous réserve des conditions initiales, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, y, t) = -\sin(x+y) + pL^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\begin{array}{l} \rho_0 \left(\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx} \\ + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{yy} \end{array} \right) \\ - \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n^1(u) \end{array} \right] \right] \\ \sum_{n=0}^{+\infty} p^n v_n(x, y, t) = \sin(x+y) + pL^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\begin{array}{l} \rho_0 \left(\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (v_n)_{xx} \\ + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (v_n)_{yy} \end{array} \right) \\ - \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n^2(v) \end{array} \right] \right] \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n^1(u) = uu_x + vu_y, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n^2(v) = uv_x + vv_y. \quad (4.7)$$

Les premières composantes de $H_n^1(u)$, $H_n^2(v)$ sont donnés comme suites

$$\begin{aligned} H_0^1(u) &= u_0 u_{0x} + v_0 u_{0y} \\ H_1^1(u) &= u_0 u_{1x} + u_1 u_{0x} + v_0 u_{1y} + v_1 u_{0y} \\ H_2^1(u) &= u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + u_2 u_{0x} + v_0 u_{2y} + v_1 u_{1y} + v_2 u_{0y} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} H_0^2(v) &= u_0 v_{0x} + v_0 v_{0y} \\ H_1^2(v) &= u_0 v_{1x} + u_1 v_{0x} + v_0 v_{1y} + v_1 v_{0y} \\ H_2^2(v) &= u_0 v_{2x} + u_1 v_{1x} + u_2 v_{0x} + v_0 v_{2y} + v_1 v_{1y} + v_2 v_{0y} \\ &\vdots \end{aligned}$$

La comparaison des coefficients p des deux côtés conduit à

$$\begin{aligned}
 p^0 & : \begin{cases} u_0(x, y, t) = -\sin(x + y) \\ v_0(x, y, t) = \sin(x + y) \end{cases}, \\
 p^1 & : \begin{cases} u_1(x, y, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \left[(u_0)_{xx} + (u_0)_{yy} \right] - H_0^1(u) \right] \right] \\ v_1(x, y, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \left[(v_0)_{xx} + (v_0)_{yy} \right] - H_0^2(v) \right] \right] \end{cases}, \\
 p^2 & : \begin{cases} u_2(x, y, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \left[(u_1)_{xx} + (u_1)_{yy} \right] - H_1^1(u) \right] \right] \\ v_2(x, y, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \left[(v_1)_{xx} + (v_1)_{yy} \right] - H_1^2(v) \right] \right] \end{cases}, \\
 p^3 & : \begin{cases} u_3(x, y, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \left[(u_2)_{xx} + (u_2)_{yy} \right] - H_2^1(u) \right] \right] \\ v_3(x, y, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \left[(v_2)_{xx} + (v_2)_{yy} \right] - H_2^2(v) \right] \right] \end{cases}, \\
 & \vdots
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Nous avons les résultats

$$\begin{aligned}
 p^0 & : \begin{cases} u_0(x, y, t) = -\sin(x + y) \\ v_0(x, y, t) = \sin(x + y) \end{cases}, \\
 p^1 & : \begin{cases} u_1(x, y, t) = -\sin(x + y) (-2\rho_0 t) \\ v_1(x, y, t) = \sin(x + y) (-2\rho_0 t) \end{cases}, \\
 p^2 & : \begin{cases} u_2(x, y, t) = -\sin(x + y) \frac{(-2\rho_0 t)^2}{2!} \\ v_2(x, y, t) = \sin(x + y) \frac{(-2\rho_0 t)^2}{2!} \end{cases}, \\
 p^3 & : \begin{cases} u_3(x, y, t) = -\sin(x + y) \frac{(-2\rho_0 t)^3}{3!} \\ v_3(x, y, t) = \sin(x + y) \frac{(-2\rho_0 t)^3}{3!} \end{cases}, \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

La forme finale de la solution sera la suivante

$$\begin{cases} u(x, y, t) = -\sin(x + y) \left(1 + (-2\rho_0 t) + \frac{(-2\rho_0 t)^2}{2!} + \dots \right) = -\sin(x + y) e^{-2\rho_0 t} \\ v(x, y, t) = \sin(x + y) \left(1 + (-2\rho_0 t) + \frac{(-2\rho_0 t)^2}{2!} + \dots \right) = \sin(x + y) e^{-2\rho_0 t} \end{cases},$$

qui est une solution exacte et identique à celle obtenue par [19].

Les tableaux 4.1 et 4.2 abordent la solution exacte (u, v) et la solution approximative (HPTM) (u^*, v^*) (5 ordres) pour $\rho_0 = 0.5$, $x = 0.1$ et $y = 0.3$ dans l'exemple 4.1

Tableau 4.1 : Résultats numériques pour u, u^* .

t	u	u^*	$ u - u^* $
0	-0.38941834	-0.38941834	0
0.05	-0.37042618	-0.37042619	0.1005720E-8
0.1	-0.35236029	-0.35236032	0.3191830E-7
0.15	-0.33517547	-0.33517571	0.2403977E-6
0.2	-0.31882877	-0.31882978	0.1004799E-5
0.25	-0.30327931	-0.30328235	0.3041622E-5
0.3	-0.28848820	-0.28849571	0.7507720E-5
0.35	-0.27441847	-0.27443456	0.1609753E-4
0.4	-0.26103492	-0.26106606	0.3113554E-4

Tableau 4.2 : Résultats numériques pour v, v^* .

t	v	v^*	$ v - v^* $
0	0.38941834	0.38941834	0
0.05	0.37042618	0.37042619	0.1005720E-8
0.1	0.35236029	0.35236032	0.3191830E-7
0.15	0.33517547	0.33517571	0.2403977E-6
0.2	0.31882877	0.31882978	0.1004799E-5
0.25	0.30327931	0.30328235	0.3041622E-5
0.3	0.28848820	0.28849571	0.7507720E-5
0.35	0.27441847	0.27443456	0.1609753E-4
0.4	0.26103492	0.26106606	0.3113554E-4

Exemple 4.2. *Considérons l'équations à deux dimensions (2D) de Navier-Stokes*

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_y = \rho_0 (u_{xx} + u_{yy}) \\ v_t + uv_x + vv_y = \rho_0 (v_{xx} + v_{yy}) \end{cases}, \quad (4.9)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = -e^{x+y} \\ v(x, y, 0) = e^{x+y} \end{cases}. \quad (4.10)$$

Pour résoudre le système ((4.9)-(4.10)), par (HPTM), nous suivons la même procédure précédante dans l'exemple 3.1, nous obtenons les relations (4.11),

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, y, t) = -e^{x+y} + pL^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\begin{array}{l} \rho_0 \left(\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx} \\ + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{yy} \end{array} \right) \\ - \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n^1(u) \end{array} \right] \right] \\ \sum_{n=0}^{+\infty} p^n v_n(x, y, t) = e^{x+y} + pL^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\begin{array}{l} \rho_0 \left(\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (v_n)_{xx} \\ + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (v_n)_{yy} \end{array} \right) \\ - \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n^2(v) \end{array} \right] \right] \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Les composants de $H_n^1(u)$, $H_n^2(v)$ sont les donnés dans l'exemple 3.1. Considérant $u_0(x, y, t) = -e^{x+y}$, $v_0(x, y, t) = e^{x+y}$. Ensuite, nous appliquons (HPTM), les premiers termes sont

$$\begin{array}{l} p^1 : \left\{ \begin{array}{l} u_1(x, y, t) = -e^{x+y} (2\rho_0 t) \\ v_1(x, y, t) = e^{x+y} (2\rho_0 t) \end{array} \right. , \\ p^2 : \left\{ \begin{array}{l} u_2(x, y, t) = -e^{x+y} \frac{(2\rho_0 t)^2}{2!} \\ v_2(x, y, t) = e^{x+y} \frac{(2\rho_0 t)^2}{2!} \end{array} \right. , \\ p^3 : \left\{ \begin{array}{l} u_3(x, y, t) = -e^{x+y} \frac{(2\rho_0 t)^3}{3!} \\ v_3(x, y, t) = e^{x+y} \frac{(2\rho_0 t)^3}{3!} \end{array} \right. , \\ \vdots \end{array}$$

Enfin, la solution exacte est

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, t) = -e^{x+y} \left(1 + (2\rho_0 t) + \frac{(2\rho_0 t)^2}{2!} + \dots \right) = -e^{x+y} e^{2\rho_0 t} = -e^{x+y+2\rho_0 t} \\ v(x, y, t) = e^{x+y} \left(1 + (2\rho_0 t) + \frac{(2\rho_0 t)^2}{2!} + \dots \right) = e^{x+y} e^{2\rho_0 t} = e^{x+y+2\rho_0 t} \end{array} \right. ,$$

qui est une solution exacte de (4.9)- (4.10), identique avec [19].

Considérons les tableaux 4.3 et 4.4 suivants avec l'observation $v = -u$.

Tableau 4.3 : Résultats numériques pour $\rho_0 = 0.5, x = 0.1$ et $y = 0.3$ dans l'exemple 4.2.

t	u	u^*	$ u - u^* $
0	-1.491824698	-1.491824698	0
0.05	-1.648721271	-1.648721146	1.264206774E-7
0.1	-1.822118800	-1.822114686	4.114691461E-6
0.15	-2.013752707	-2.013720921	3.178716813E-5
0.2	-2.225540928	-2.225404630	1.362995311E-4
0.25	-2.459603111	-2.459179776	4.233361389E-4
0.3	-2.718281828	-2.717209505	1.072324175E-3
0.35	-3.004166024	-3.001806147	2.359878904E-3
0.4	-3.320116923	-3.315431209	4.685714699E-3

Tableau 4.4 : Erreur absolue = $|u - u^*|$ pour $\rho_0 = 1$ dans l'exemple 3.2

	$t = 0.1$	$t = 0.3$	$t = 0.5$
(x, y)	$ u - u^* $	$ u - u^* $	$ u - u^* $
(0.1, 0.1)	3.36882444E-6	8.77944780E-4	1.21511194E-2
(0.3, 0.1)	4.11469146E-6	1.07232418E-3	1.48414107E-2
(0.5, 0.2)	5.55425251E-6	1.44748623E-3	2.00338090E-2
(0.7, 0.2)	6.78397933E-6	1.76796368E-3	2.44693496E-2
(0.3, 0.3)	5.02569550E-6	1.30973971E-3	1.81273400E-2
(0.5, 0.3)	6.13839835E-6	1.59971969E-3	2.21407831E-2
(0.7, 0.5)	9.15741425E-6	2.38650134E-3	3.30301670E-2
(0.9, 0.5)	1.11848910E-5	2.91487932E-3	4.03431371E-2

Exemple 4.3. Considérons l'équation à trois dimensions (3D) de Navier-Stokes

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_y + ww_z = \rho_0 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ v_t + uv_x + vv_y + ww_z = \rho_0 (v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z = \rho_0 (w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}) \end{cases}, \quad (4.12)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z, t) = -0.5x + y + z \\ v(x, y, z, 0) = v_0(x, y, z, t) = x - 0.5y + z \\ w(x, y, z, 0) = w_0(x, y, z, t) = x + y - 0.5z \end{cases} \quad (4.13)$$

Comme auparavant, en prenant la transformation inverse de Laplace, nous obtenons

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0 + pL^{-1} \left[\frac{1}{s} L [\rho_0 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - (uu_x + vu_y + wu_z)] \right] \\ v(x, y, z, t) = v_0 + pL^{-1} \left[\frac{1}{s} L [\rho_0 (v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) - (uv_x + vv_y + wv_z)] \right] \\ w(x, y, z, t) = w_0 + pL^{-1} \left[\frac{1}{s} L [\rho_0 (w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}) - (uw_x + vw_y + ww_z)] \right] \end{cases} \quad (4.14)$$

En appliquant la méthode (HPTM) sous réserve des conditions initiales, nous avons

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, y, z, t) = (-0.5x + y + z) + pL^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx} \\ + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{yy} \\ + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{zz} \\ - \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n^1(u) \end{pmatrix} \right] \right] \\ \sum_{n=0}^{+\infty} p^n v_n(x, y, z, t) = (x - 0.5y + z) + pL^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (v_n)_{xx} \\ + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (v_n)_{yy} \\ + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (v_n)_{zz} \\ - \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n^2(v) \end{pmatrix} \right] \right] \\ \sum_{n=0}^{+\infty} p^n w_n(x, y, z, t) = (x + y - 0.5z) + pL^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (w_n)_{xx} \\ + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (w_n)_{yy} \\ + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (w_n)_{zz} \\ - \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n^3(w) \end{pmatrix} \right] \right] \end{cases} \quad (4.15)$$

Où

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n^1(u) &= uu_x + vu_y + wu_z, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n^2(v) &= uv_x + vv_y + wv_z, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n^3(w) &= uw_x + vw_y + ww_z, \end{aligned}$$

Chapitre 4 : Equations à plusieurs dimensions de Navier Stokes. Solutions exactes et numériques par (HPTM)

les premières composantes de $H_n^1(u)$, $H_n^2(v)$ et $H_n^3(w)$ sont les suivants

$$\begin{aligned}
 H_0^1(u) &= u_0 u_{0x} + v_0 u_{0y} + w_0 u_{0z} \\
 H_1^1(u) &= u_0 u_{1x} + u_1 u_{0x} + v_0 u_{1y} + v_1 u_{0y} + w_0 u_{1z} + w_1 u_{0z} \\
 H_2^1(u) &= u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + u_2 u_{0x} + v_0 u_{2y} + v_1 u_{1y} + v_2 u_{0y} , \\
 &\quad + w_0 u_{2z} + w_1 u_{1z} + w_2 u_{0z} \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_0^2(v) &= u_0 v_{0x} + v_0 v_{0y} + w_0 v_{0z} \\
 H_1^2(v) &= u_0 v_{1x} + u_1 v_{0x} + v_0 v_{1y} + v_1 v_{0y} + w_0 v_{1z} + w_1 v_{0z} \\
 H_2^2(v) &= u_0 v_{2x} + u_1 v_{1x} + u_2 v_{0x} + v_0 v_{2y} + v_1 v_{1y} + v_2 v_{0y} , \\
 &\quad + w_0 v_{2z} + w_1 v_{1z} + w_2 v_{0z} \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 H_0^3(w) &= u_0 w_{0x} + v_0 w_{0y} + w_0 w_{0z} \\
 H_1^3(w) &= u_0 w_{1x} + u_1 w_{0x} + v_0 w_{1y} + v_1 w_{0y} + w_0 w_{1z} + w_1 w_{0z} \\
 H_2^3(w) &= u_0 w_{2x} + u_1 w_{1x} + u_2 w_{0x} + v_0 w_{2y} + v_1 w_{1y} + v_2 w_{0y} \\
 &\quad + w_0 w_{2z} + w_1 w_{1z} + w_2 w_{0z} \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned}$$

Par identification des termes de mêmes puissances de p dans l'équation ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}
 p^0 & : \begin{cases} u_0(x, y, z, t) = (-0.5x + y + z) \\ v_0(x, y, z, t) = (x - 0.5y + z) \\ w_0(x, y, z, t) = (x + y - 0.5z) \end{cases} , \\
 p^1 & : \begin{cases} u_1(x, y, z, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \left[(u_0)_{xx} + (u_0)_{yy} + (u_0)_{zz} \right] - H_0^1(u) \right] \right] \\ v_1(x, y, z, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \left[(v_0)_{xx} + (v_0)_{yy} + (v_0)_{zz} \right] - H_0^2(v) \right] \right] \\ w_1(x, y, z, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \left[(w_0)_{xx} + (w_0)_{yy} + (w_0)_{zz} \right] - H_0^3(w) \right] \right] \end{cases} , \\
 p^2 & : \begin{cases} u_2(x, y, z, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \left[(u_1)_{xx} + (u_1)_{yy} + (u_1)_{zz} \right] - H_1^1(u) \right] \right] \\ v_2(x, y, z, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \left[(v_1)_{xx} + (v_1)_{yy} + (v_1)_{zz} \right] - H_1^2(v) \right] \right] \\ w_2(x, y, z, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \left[(w_1)_{xx} + (w_1)_{yy} + (w_1)_{zz} \right] - H_1^3(w) \right] \right] \end{cases} \quad (4,16) \\
 p^3 & : \begin{cases} u_3(x, y, z, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \left[(u_2)_{xx} + (u_2)_{yy} + (u_2)_{zz} \right] - H_2^1(u) \right] \right] \\ v_3(x, y, z, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \left[(v_2)_{xx} + (v_2)_{yy} + (v_2)_{zz} \right] - H_2^2(v) \right] \right] \\ w_3(x, y, z, t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} L \left[\rho_0 \left[(w_2)_{xx} + (w_2)_{yy} + (w_2)_{zz} \right] - H_2^3(w) \right] \right] \end{cases} , \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Nous obtenons les résultats

$$\begin{aligned}
 p^0 & : \begin{cases} u_0(x, y, z, t) = (-0.5x + y + z) \\ v_0(x, y, z, t) = (x - 0.5y + z) \\ w_0(x, y, z, t) = (x + y - 0.5z) \end{cases} , \\
 p^1 & : \begin{cases} u_1(x, y, z, t) = -2.25xt \\ v_1(x, y, z, t) = -2.25yt \\ w_1(x, y, z, t) = -2.25zt \end{cases} , \\
 p^2 & : \begin{cases} u_2(x, y, z, t) = (-0.5x + y + z) 2.25t^2 \\ v_2(x, y, z, t) = (x - 0.5y + z) 2.25t^2 \\ w_2(x, y, z, t) = (x + y - 0.5z) 2.25t^2 \end{cases} , \\
 p^3 & : \begin{cases} u_3(x, y, z, t) = -(2.25)^2 xt^3 \\ v_3(x, y, z, t) = -(2.25)^2 yt^3 \\ w_3(x, y, z, t) = -(2.25)^2 zt^3 \end{cases} , \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Enfin

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z, t) = (-0.5x + y + z - 2.25xt) (1 + 2.25t^2 + 2.25^2t^4 + 2.25^3t^6) \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{-0.5x+y+z-2.25xt}{1-2.25t^2} \\ v(x, y, z, t) = (x - 0.5y + z - 2.25yt) (1 + 2.25t^2 + 2.25^2t^4 + 2.25^3t^6) \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{x-0.5y+z-2.25yt}{1-2.25t^2} \\ w(x, y, z, t) = (x + y - 0.5z - 2.25zt) (1 + 2.25t^2 + 2.25^2t^4 + 2.25^3t^6) \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{x+y-0.5z-2.25zt}{1-2.25t^2} \end{array} \right. ,$$

La même solution exacte trouvée dans [19].

Les tableaux 5, 6 et 7 abordent la solution exacte (u, v, w) et la solution approximative (HPTM) (u^*, v^*, w^*) (5 ordres) pour $x = 0.1, y = 0.3$ et $z = 0.5$ dans l'exemple 4.3

Tableau 4.5 : Résultats numériques pour u, u^* .

t	u	u^*	$ u - u^* $
0	0.75	0.75	0
0.05	0.7430	0.7429	2.3507E-5
0.1	0.7443	0.7439	3.7677E-4
0.15	0.7545	0.7525	1.9336E-3
0.2	0.7747	0.7685	6.2753E-3
0.25	0.8073	0.7913	1.5964E-2
0.3	0.8558	0.8207	3.5093E-2
0.35	0.9267	0.8563	7.0398E-2
0.4	1.0313	0.8976	1.3365E-1

Tableaux 4.6 : Résultats numériques pour v, v^* .

t	v	v^*	$ v - v^* $
0	0.45	0.45	0
0.05	0.4186	0.4185	1.3245E-5
0.1	0.3913	0.3911	1.9810E-4
0.15	0.3674	0.3664	9.4147E-4
0.2	0.3462	0.3434	2.8039E-3
0.25	0.3273	0.3208	6.4720E-3
0.3	0.3104	0.2976	1.2726E-2
0.35	0.2951	0.2727	2.2417E-2
0.4	0.2813	0.2448	3.6450E-2

Tableau 4.7 : Résultats numériques pour w, w^* .

t	w	w^*	$ w - w^* $
0	0.15	0.15	0
0.05	9.4281E-2	9.4277E-2	2.9831E-6
0.1	3.8363E-2	3.8344E-2	1.9421E-5
0.15	-1.9750E-2	-1.9699E-2	5.0617E-5
0.2	-8.2418E-2	-8.1750E-2	6.6758E-4
0.25	-1.5273E-1	-1.4971E-1	3.0202E-3
0.3	-2.35110E-1	-2.2547E-1	9.6420E-3
0.35	-3.3650E-1	-3.1093E-1	2.5563E-2
0.4	-4.6875E-1	-4.0800E-1	6.0750E-2

À travers les tableaux [1-7], nous observons que cette méthode est efficace et précise pour différentes valeurs spatiales et temporelles.

4.3 Conclusion

La méthode (HPTM) est extrêmement flexible pour résoudre des équations de Navier-Stokes à deux et trois dimensions en coordonnées cartésiennes, tout en conservant la vitesse de convergence et la précision de cette méthode. Nous concluons que la présente méthode peut être considérée parmi les plus fiables

Chapitre 4 : Equations à plusieurs dimensions de Navier Stokes. Solutions exactes et numériques par (HPTM)

pour trouver une approximation précise pour des classes plus larges d'équations différentielles non linéaires.

Chapitre 5

Algorithme précis (VIMHP) pour le modèle de population biologique

5.1 Introduction

Le modèle de population biologique (BPM) qui survient dans de nombreux phénomènes physiques importants [14, 31, 59] a été résolu par de nombreuses méthodes numériques telles que la méthode d'itération variationnelle (VIM) et la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) [67], la méthode de perturbation homotopique (HPM) [65], la méthode d'analyse par homotopie (HAM) [11], la méthode de transformation de perturbation homotopique (HPTM) [42]. Dans ce chapitre, nous allons implémenter la méthode d'itération variationnelle à l'aide des polynômes de He (VIMHP) [46, 47], pour obtenir la solution approximative de l'équation de population biologique en tant que modèle non linéaire comme suit [11, 65, 67, 91]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial y^2} + f(u), t \geq 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ f(u) = hu^a (1 - ru^b), u(x, y, 0) = g(x, y), \end{array} \right. \quad (5.1)$$

où u désigne la densité de population, f représente l'offre de population due aux naissances et aux décès ; h, a, b et r sont des nombres réels, et g est la condition initiale. Ce document est organisé comme suit :

La section 2 est consacrée à une courte description des méthodes (VIM), (HPM)

et de la méthode d'itération variationnelle à l'aide des polynômes de He (VIMHP). Dans la section 3, quatre exemples et des résultats numériques sont présentés pour étudier la performance de la méthode proposée, suivie de la comparaison des solutions approchées et des solutions obtenues respectivement par la méthode d'itération variationnelle et la méthode de décomposition d'Adomian. Enfin dans la section 4, une conclusion termine ce travail.

5.2 Description des méthodes numériques

5.2.1 Méthode d'itération variationnelle à l'aide des polynômes de He

Les méthodes (VIM) et (HPM) ont déjà été utilisées dans les chapitre 1 et 2. Pour éviter les répétitions nous exploitons l'essentiel de ces méthodes dans ce qui suit.

Dans cette section, nous soulignons brièvement le point principal de la méthode d'itération variationnelle à l'aide des polynômes de He (VIMHP) [46, 47, 49]. Nous considérons l'équation suivante

$$Lu(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t). \quad (5.2)$$

Nous construisant une fonction de correction comme suit

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(s) [Lu_n(x, s) + N\tilde{u}_n(x, s) - g(x, s)] ds, \quad (5.3)$$

où λ est un multiplicateur général de Lagrange. Maintenant, en utilisant la méthode de perturbation homotopique [17, 33], nous pouvons construire une équation comme suit

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i(x, t) = u_0(x, t) + p \int_0^t \lambda(s) \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i(x, s) \right) - g(x, s) \right] ds. \quad (5.4)$$

La procédure est construite par couplage des méthodes (VIM) et (HPM). Une comparaison des puissances semblables de p donne des solutions aux divers ordres. En assimilant les termes de (5.4) avec des puissances identiques de p , et en prenant la limite de p vers 1, nous avons la formule.

$$u(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{i=0}^{+\infty} p^i u_i(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots \quad (5.5)$$

Donc, nous considérons la méthode d'itération variationnelle avec les polynômes de He pour calculer les solutions approchées. Pour des calculs numériques ultérieurs, les expressions

$$\psi_n(x, t) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i(x, t)$$

et

$$|u(x, t) - \psi_n(x, t)|$$

désignent pour $n \geq 1$, respectivement l'approximation et l'erreur absolue à l'ordre n de $u(x, t)$.

5.3 Résultats numériques

Nous présentons ici quelques exemples, avec une solution analytique disponible pour illustrer l'efficacité de la méthode décrite dans la section précédente pour résoudre le problème. (5.1). Ensuite, une comparaison est faite avec les résultats analytiques obtenus en [67] en utilisant les méthodes (VIM) et (ADM) et en [65] en utilisant (HPM), pour démontrer la précision et l'efficacité de la méthode actuelle (VIMHP).

Exemple 5.1. Nous considérons (BPM) (5.1) avec $a = 1, r = 0$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^2(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2(x, y, t)}{\partial y^2} + hu(x, y, t), \quad (5.6)$$

avec la condition initiale

$$u_0(x, y, t) = u(x, y, 0) = \sqrt{x + y + xy}. \quad (5.7)$$

la fonction de correction est la suivante

$$u_{n+1}(x, y, t) = u_n(x, y, t) + \int_0^t \lambda(s) \left[\frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_n^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_n^2}{\partial y^2} - h\tilde{u}_n \right] ds, \quad (5.8)$$

voici les conditions stationnaires

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \lambda(s) |_{s=t} = 0, \\ \lambda'(s) = 0. \end{array} \right. , \quad (5.9)$$

Le multiplicateur de Lagrange peut être identifié comme $\lambda(s) = -1$, par conséquent, nous obtenons l'itération suivante

$$u_{n+1}(x, y, t) = u_n(x, y, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_n^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_n^2}{\partial y^2} - hu_n \right] ds. \quad (5.10)$$

L'application de la méthode (VIM) utilisant les polynômes de He (VIMHP), nous donne

$$u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots = \sqrt{x + y + xy} + p \int_0^t \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)^2 \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)^2 \\ + h(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) \end{array} \right\} ds.$$

Pour trouver $u_i, i = 0, 1, 2, \dots$ de ce problème, les coefficients d'équivalence de puissance correspondante de p des deux côtés sont utilisés. De plus, nous obtenons la relation de récurrence donnée ci-dessous

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, y, t) &= \sqrt{x + y + xy}, \\ p^1 : u_1(x, y, t) &= \int_0^t \left[\frac{\partial^2 (u_0^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u_0^2)}{\partial y^2} + hu_0 \right] ds \\ &= \sqrt{x + y + xy} ht, \\ p^2 : u_2(x, y, t) &= \int_0^t \left[\frac{\partial^2 (2u_0u_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (2u_0u_1)}{\partial y^2} + hu_1 \right] ds \\ &= \sqrt{x + y + xy} \frac{h^2 t^2}{2!}, \\ p^3 : u_3(x, y, t) &= \int_0^t \left[\frac{\partial^2 (2u_0u_2 + u_1^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (2u_0u_2 + u_1^2)}{\partial y^2} + hu_2 \right] ds \\ &= \sqrt{x + y + xy} \frac{h^3 t^3}{3!}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

La solution approximative du problème (5.6)-(5.7) est

$$u(x, y, t) = \sqrt{x + y + xy} \left(1 + ht + \frac{(ht)^2}{2!} + \frac{(ht)^3}{3!} + \dots \right), \quad (5.11)$$

et sous forme exacte comme suit

$$u(x, y, t) = \sqrt{x + y + xy}e^{ht}. \quad (5.12)$$

Si nous changeons la condition initiale comme $u(x, y, 0) = \sqrt{\alpha x + \beta y + \gamma xy}$, la solution approximative sous forme d'une série est

$$u(x, y, t) = \sqrt{\alpha x + \beta y + \gamma xy} \left(1 + ht + \frac{(ht)^2}{2!} + \frac{(ht)^3}{3!} + \dots \right),$$

qui converge vers la solution exacte $u(x, y, t) = \sqrt{\alpha x + \beta y + \gamma xy} e^{ht}$, où α, β, γ , sont des nombres réels. Le même résultat a été obtenu par [65, 67] avec les paramètres $\alpha = \beta = 0, \gamma = 1$ et $h = \frac{1}{5}$.

Exemple 5.2. Nous considérons (BPM) (5.1) avec $a = 1, r = 0$ et $h = 1$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^2(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2(x, y, t)}{\partial y^2} + u(x, y, t), \quad (5.13)$$

et la condition initiale

$$u_0(x, y, t) = u(x, y, 0) = \sqrt{\sin(\theta x) \cosh(\theta y)}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (5.14)$$

comme ce qui précède, $\lambda(s) = -1$, par suite la formule d'itération est

$$u_{n+1}(x, y, t) = u_0(x, y, t) + \int_0^t \left[\frac{\partial^2 u_n^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n^2}{\partial y^2} + u_n \right] ds. \quad (5.15)$$

L'application de la méthode (VIMHP) donne

$$u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots = \sqrt{\sin(\theta x) \cosh(\theta y)} + p \int_0^t \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)^2 \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)^2 \\ + (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) \end{array} \right\} ds.$$

Nous avons les résultats

$$\begin{aligned}
 p^0 : u_0(x, y, t) &= \sqrt{\sin(\theta x) \cosh(\theta y)}, \\
 p^1 : u_1(x, y, t) &= \int_0^t \left[\frac{\partial^2(u_0^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u_0^2)}{\partial y^2} + u_0 \right] ds \\
 &= \sqrt{\sin(\theta x) \cosh(\theta y)} t, \\
 p^2 : u_2(x, y, t) &= \int_0^t \left[\frac{\partial^2(2u_0u_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(2u_0u_1)}{\partial y^2} + u_1 \right] ds \\
 &= \sqrt{\sin(\theta x) \cosh(\theta y)} \frac{t^2}{2!}, \\
 p^3 : u_3(x, y, t) &= \int_0^t \left[\frac{\partial^2(2u_0u_2+u_1^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(2u_0u_2+u_1^2)}{\partial y^2} + u_2 \right] ds \\
 &= \sqrt{\sin(\theta x) \cosh(\theta y)} \frac{t^3}{3!}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

La solution approximative de problème (5.13)-(5.14) sous forme une série est la suivante

$$u(x, y, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i = \sqrt{\sin(\theta x) \cosh(\theta y)} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right), \quad (5.16)$$

par conséquent, la solution exacte est

$$u(x, y, t) = \sqrt{\sin(\theta x) \cosh(\theta y)} e^t. \quad (5.17)$$

Le changement de la condition initiale comme $u(x, y, 0) = \sqrt{\sin(\theta x) \sinh(\theta y)}$, fournit une solution exacte sous la forme

$$u(x, y, t) = \sqrt{\sin(\theta x) \sinh(\theta y)} e^t, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Exemple 5.3. Nous considérons (BPM) (5.1) avec $a = 1, b = 1$ avec la condition initiale

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^2(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2(x, y, t)}{\partial y^2} + hu(x, y, t) (1 - ru(x, y, t)), \quad (5.18)$$

$$u_0(x, y, t) = e^{\sqrt{\frac{hr}{s}}(x+y)}. \quad (5.19)$$

En appliquant la méthode précitée sous réserve de la condition initiale et $\lambda(s) = -1$, nous avons

$$u_0 + pu_1 + \dots = e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)} + p \int_0^t \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 + pu_1 + \dots)^2 \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (u_0 + pu_1 + \dots)^2 \end{array} \right\} ds \\ + p \int_0^t h (u_0 + pu_1 + \dots) (1 - r (u_0 + pu_1 + \dots)) ds.$$

Par identification des termes de mêmes puissances de p , nous obtenons

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, y, t) &= e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)}, \\ p^1 : u_1(x, y, t) &= \int_0^t \left[\frac{\partial^2 (u_0^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u_0^2)}{\partial y^2} \right] ds \\ &= e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)} ht, \\ p^2 : u_2(x, y, t) &= \int_0^t \left[\frac{\partial^2 (2u_0u_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (2u_0u_1)}{\partial y^2} \right] ds \\ &= e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)} \frac{h^2 t^2}{2!}, \\ p^3 : u_3(x, y, t) &= \int_0^t \left[\frac{\partial^2 (2u_0u_2 + u_1^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (2u_0u_2 + u_1^2)}{\partial y^2} \right] ds \\ &= e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)} \frac{h^3 t^3}{3!}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

De la même manière, nous pouvons déterminer les autres composants par (VIMHP). Enfin, la solution approximative du problème (5.18)-(5.19) sous forme de série est donné par

$$u(x, y, t) = e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ht)^k}{k!}, \quad (5.20)$$

et sous forme exacte par

$$u(x, y, t) = e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y) + ht}, \quad (5.21)$$

la solution exacte est la même que celle obtenue par [65, 67] pour $h = -1$ et $r = -8/9$.

Tableau 5.1 : L'erreur absolue $|Exact - \psi_4|$ pour différentes valeurs de (x, y, t) pour $h = -1$ et $r = -8/9$ dans l'exemple 5.3

(x, y)	$t = 0.1$	$t = 0.3$	$t = 0.5$
(-10,-10)	5.1983E -9	4.0498E -7	3.0085E -6
(-8,-8)	7.4813E -8	5.8284E -6	4.3298E -5
(-4,-4)	2.8382E -7	2.2111E -5	1.6426E -4
(-2,-2)	1.0767E -6	8.3882E -5	6.2314E -4
(0,0)	4.0847E -6	3.1822E -4	2.3640E -3
(2,2)	1.5497E -5	1.2072E -3	8.9682E -3
(4,4)	5.8790E -5	4.5798E -3	3.4022E -2
(6,6)	2.2302E -4	1.7374E -2	1.2907
(8,8)	8.4605E -4	6.5912E -2	4.8965
(10,10)	3.2096E -3	2.5005E -1	1.8576

Tableau 5.2 : Comparaison entre la solution exacte et ψ_4 à $t = 0.2$ pour $h = -1$ et $r = -8/9$ dans l'exemple 5.3

(x, y)	Valeur exacte	ψ_4	$ Exact - \psi_4 $
(-10,-10)	1.04194E-3	1.04186E-3	8.1559E-8
(-8,-8)	3.95279E-3	3.95248E-3	3.0941E-7
(-6,-6)	1.49956E-2	1.49944E-2	1.1738E-6
(-4,-4)	5.68882E-2	5.68838E-2	4.4529E-6
(-2,-2)	2.15815E-1	2.15798E-1	1.6893E-5
(0,0)	8.18731E-1	8.18667E-1	6.4086E-5
(2,2)	3.10599	3.10575	2.4312E-4
(4,4)	11.78310	11.78218	9.2233E-4
(6,6)	44.70118	44.69769	3.4989E-3
(8,8)	169.58145	169.56817	1.3274E-2
(10,10)	643.33567	643.28534	5.0357E-2

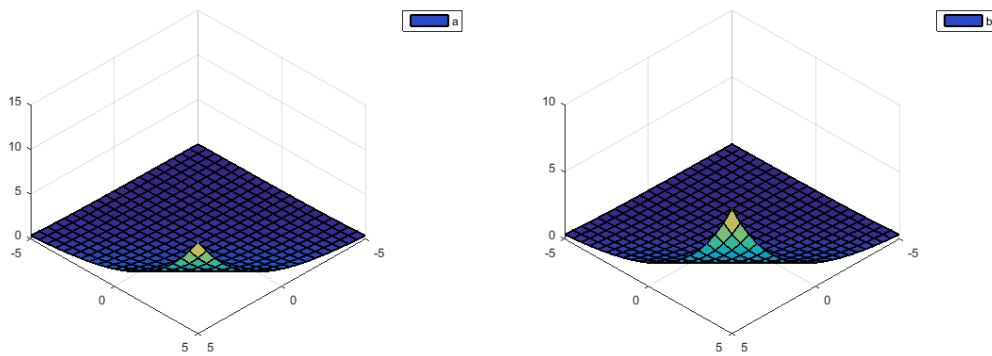


FIGURE 5.1 – Le comportement de la solution exacte (a) et la solution approximative (b) pour $-5 \leq x, y \leq 5$ et $t = 1$.

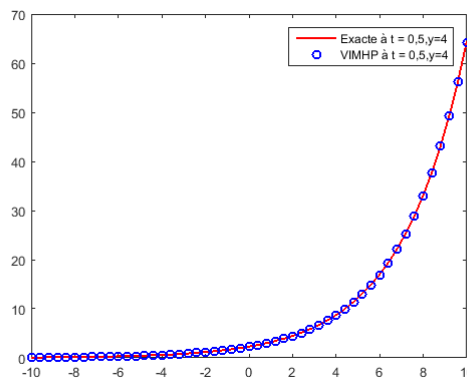


FIGURE 5.2 – Le comportement de la solution exacte et la solution approximative pour $t = 0.5, y = 4$.

Exemple 5.4. Nous considérons (BPM) (5.1) avec $a = -1, b = 1, h = \frac{1}{96}$ et $r = 48$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^2(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2(x, y, t)}{\partial y^2} + \frac{1}{96}u^{-1}(x, y, t) - \frac{1}{2}, \quad (5.22)$$

et la condition initiale suivante

$$u_0(x, y, t) = u(x, y, 0) = \frac{1}{4}\sqrt{2(x^2 + y^2) + y + 5}, \quad (5.23)$$

Comme de qui précède, $\lambda(s) = -1$, en appliquant la méthode (VIMHP), nous avons

$$u_0 + pu_1 + \dots = \frac{1}{4} \sqrt{2(x^2 + y^2) + y + 5} + p \int_0^t \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 + pu_1 + \dots)^2 \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (u_0 + pu_1 + \dots)^2 \\ + \frac{1}{96} (u_0 + pu_1 + \dots)^{-1} - \frac{1}{2} \end{array} \right\} ds.$$

Nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, y, t) &= \frac{1}{4} \sqrt{2(x^2 + y^2) + y + 5}, \\ p^1 : u_1(x, y, t) &= \int_0^t \left[\frac{\partial^2 (u_0^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u_0^2)}{\partial y^2} + \frac{1}{96u_0} - \frac{1}{2} \right] ds \\ &= \frac{1}{24} \left(2(x^2 + y^2) + y + 5 \right)^{-\frac{1}{2}} t, \\ p^2 : u_2(x, y, t) &= \int_0^t \left[\frac{\partial^2 (2u_0u_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (2u_0u_1)}{\partial y^2} - \frac{1}{96} \left(\frac{u_1}{u_0^2} \right) \right] ds \\ &= -\frac{1}{288} \left(2(x^2 + y^2) + y + 5 \right)^{-\frac{3}{2}} t^2, \\ p^3 : u_3(x, y, t) &= \int_0^t \left[\frac{\partial^2 (2u_0u_2 + u_1^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (2u_0u_2 + u_1^2)}{\partial y^2} + \frac{1}{96} \left(\frac{-u_2}{u_0^2} + \frac{u_1^2}{u_0^3} \right) \right] ds \\ &= \frac{1}{1728} \left(2(x^2 + y^2) + y + 5 \right)^{-\frac{5}{2}} t^3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nous obtenons les composants qui constituent $u(x, y, t)$

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4} \sqrt{2(x^2 + y^2) + y + 5} + \frac{1}{24} \left(2(x^2 + y^2) + y + 5 \right)^{-\frac{1}{2}} t - \frac{1}{288} \left(2(x^2 + y^2) + y + 5 \right)^{-\frac{3}{2}} t^2 + \frac{1}{1728} \left(2(x^2 + y^2) + y + 5 \right)^{-\frac{5}{2}} t^3 + \dots,$$

et nous avons donc la solution exacte du (5.22) - (5.23) tel que présenté dans [67]

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4} \sqrt{2(x^2 + y^2) + y + \frac{t}{3} + 5}, \quad (5.24)$$

Chapitre 5 : Algorithme précis (VIMHP) pour le modèle de population biologique

Tableau 5.3 : Comparaison entre la solution exacte et ψ_3 obtenu par (VIMHP) à $t = 20$, dans l'exemple 5.4

(x, y)	Valeur exacte	ψ_3
(-450,-450)	224.9391121318537	224.9391121318537
(-400,-400)	199.9393137096021	199.9393137096020
(-300,-300)	149.9399185229426	149.9399185229425
(-250,-250)	124.9404024591992	124.9404024591990
(0,0)	0.853912563829967	0.807468991874924
(50,50)	25.07696486153511	25.07696486107864
(100,100)	50.06974302577023	50.06974302575586
(200,200)	100.0661239714353	100.0661239714349
(350,350)	175.0645714205666	175.0645714205666
(500,500)	250.0639501540889	250.0639501540889

Tableau 5.4 : L'erreur absolue de (VIMHP) et (VIM), (ADM) [67] pour différentes valeurs de (x, y) à $t = 10$ dans l'exemple 5.4

(x, y)	$ Exact - \psi_3 $	$ Exact - VIM $	$ Exact - ADM $
(-450,-450)	9.8139 E-16	7.2722 E-12	2.5734 E-6
(-400,-400)	1.7688 E-15	1.1070 E-11	3.2571 E-6
(-300,-300)	7.4574 E-15	3.5787 E-11	8.3410 E-6
(0,0)	7.3883 E-3	1.7778 E-1	8.0947 E-1
(50,50)	5.7070 E-11	4.5728 E-8	2.0689 E-4
(100,100)	1.7965 E-12	2.8771 E-9	5.1928 E-5
(200,200)	5.6333 E-14	1.8040 E-10	1.3003 E-5
(350,350)	3.4370 E-15	1.9069 E-11	4.2485 E-6
(500,500)	5.7797 E-16	4.5626 E-12	2.0823 E-6

D'après les tableaux [1-4], la comparaison révèle que nos solutions approximatives sont en très bon accord avec les solutions données dans [67]. De plus, les résultats démontrent clairement que la méthode (VIMHP) est plus précise et plus pratique pour résoudre les équations différentielles non linéaires.

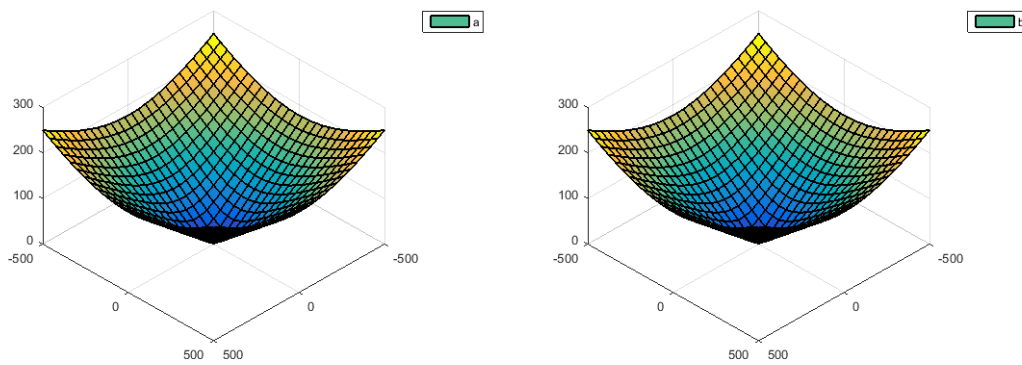


FIGURE 5.3 – Le comportement de la solution exacte (a) et la solution approximative (b) pour $t = 10$ et $-500 \leq x, y \leq 500$.

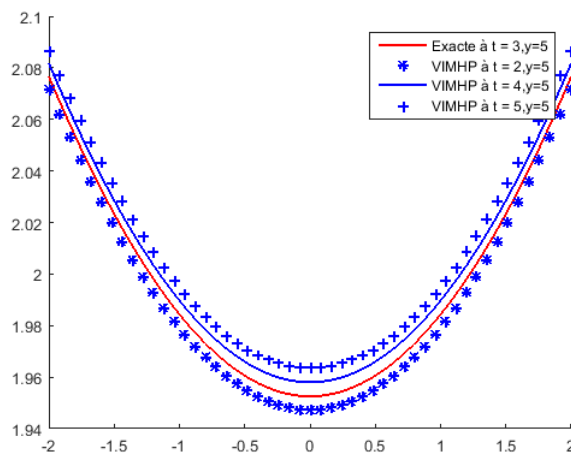


FIGURE 5.4 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives pour différents valeurs de t .

5.4 Conclusion

Nous avons montré, dans ce chapitre, que la méthode d'itération variationnelle utilisant les polynômes de He (VIMHP) a été utilisée avec succès pour ré-

soudre le modèle de population biologique. Cette méthode est basée sur (VIM) et (HPM). Pour nos équations, les résultats sont exactement les mêmes que ceux obtenus par les méthodes (VIM), (ADM) et (HPM). En ce qui concerne les avantages de (VIMHP), un avantage évident de cette technique par rapport à la méthode (HPM). nous n'avons pas besoin de résoudre une équation différentielle à chaque itération, cela réduit la taille du calcul sans l'hypothèse restrictive. Les solutions approchées données par (VIMHP) convergent vers la solution exacte plus rapidement dans les cas étudiés. Enfin, Nous concluons que le schéma proposé est très puissant, efficace et fiable pour trouver les solutions analytiques pour une classe plus large d'équations différentielles linéaires et non linéaires.

Conclusion Générale

Nous avons visé deux objectifs principaux dans ce travail. Le premier consistait à montrer la puissance des méthodes (VIM), (HPM), (HPTM) et (VIMHP) et les avantages de leurs fonctionnalités ; le second à employer ces méthodes pour obtenir des solutions approximatives d'équations différentielles ordinaires, d'équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires.

Le fait remarquable est que ces méthodes donnent des approximations successives à convergence rapide sans aucune hypothèse restrictive supplémentaire ou l'ajout qu'une quelconque transformation qui pourrait changer le comportement physique du problème.

Les méthodes mentionnées donnent plusieurs approximations successives tout en réduisant la taille des calculs. L'emploi de la méthode (VIM) avec l'itération de la fonction de correction, ne nécessite pas l'utilisation des polynômes d'Adomian. Elle s'avère facile à utiliser et fournit une méthode efficace pour traiter les problèmes non linéaires, où quelques approximations par une itération directe peuvent être utilisées pour atteindre un degré élevé de précision.

Les méthodes (HPM), (HPTM) et (VIMHP) basées sur les polynômes de He, sont appliquées de manière directe sans recourir à la linéarisation, à la discrétisation ou à des hypothèses restrictives supplémentaires.

En conclusion, nous pouvons dire les méthodes proposés sont très puissantes et efficaces pour trouver les solutions analytiques pour une large classe de problèmes. Elles donnent en plus solutions sous forme de séries qui convergent très rapidement pour différents types de problèmes.

Nous pouvons observer aussi que les termes non linéaires peuvent être facilement gérés par l'utilisation de polynômes de He. Les avantages des méthodes (HPTM) et (VIMHP) par rapport à ceux à la méthode (HPM), se situent dans le fait que les procédures de ces deux méthodes n'ont nul besoin de résoudre une équation différentielle à chaque itération. Ceci permet de réduire la taille des calculs sans hypothèse restrictive. Les solutions souhaitées ont été obtenues rapidement et directement. Les deux objectifs visés ont été atteints.

Perspectives

Pour l'avenir, notre première perspective serait d'appliquer ces méthodes pour résoudre des équations différentielles linéaires et non linéaires d'ordre fractionnaire selon une approche adéquate qui serait à déterminer. Parmi ces équations, nous soulignons celles de Fornberg-Whitham, de Brusselator, etc. Comme deuxième perspective nous serons tentés d'élargir notre travail dans le champ complexe.

Annexe

La transformée de Laplace

Définitions et propriétés

La transformée de Laplace constitue une outil puissante pour résoudre les équations différentielles linéaire, certaines équations intégrales et équations aux dérivées partielles. Elle réduit le problème de résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants à un problème algébrique.

Définition 1 : La classe de fonctions réelles C_L est formée des fonctions causales continues par morceaux et d'ordre exponentielle.

Remarques :

1. Une fonction est causale si elle est nulle pour $t < 0$,

$$f(t) \equiv 0 \quad \text{si } t < 0.$$

2. Elle est continue par morceaux si elle n'admet que des points de discontinuités de première espèce (admettant une limite à gauche et une limite à droite).
3. Elle est d'ordre exponentielle si elle est bornée par une exponentielle, c'est-à-dire, s'il existe des constantes réelles $M \geq 0$ et r telles que, pour $t \geq 0$,

$$|f(t)| \leq Me^{rt}.$$

Définition 2 : La transformation de Laplace d'une fonction de C_L est définie par

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (5.25)$$

s est une variable complexe et $F(s)$ une fonction complexe.

Remarques :

1. F est définie par une intégrale impropre qui ne converge pas toujours si f n'appartient pas à C_L .
2. Si f est discontinue en 0, la borne inférieure de l'intégrale devrait être notée 0^+ .

Formulaire des transformées de Laplace usuelles

Formulaire des transformées de Laplace usuelles, $c; a; w$ sont des constantes, n est un entier positif, $t \geq 0$.

$f(t)$	$F(s)$	Abscisse de convergence
c	$\frac{c}{s}$	0
t	$\frac{1}{s^2}$	0
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$-\Re(a)$
$e^{-at}t^n$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$-\Re(a)$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	0
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	0
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$ \omega $
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$ \omega $
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$-\Re(a)$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$-\Re(a)$
$e^{-at}\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2-\omega^2}$	$ \omega - \Re(a)$
$e^{-at}\cosh(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2-\omega^2}$	$ \omega - \Re(a)$
$t^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$	0
$t^{-\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{\pi}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$	0

Propriétés

Linéarité

Proposition 1 : Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace $L(f)$ et $L(g)$ et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$L(af + bg) = aL(f) + bL(g).$$

Transformée de Laplace de la translation

Proposition 2 : Soient $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction admettant des transformées de Laplace $L(f)$. On considère la fonction f_a définie par $f_a(t) = f(t - a)$, $a > 0$, Alors

$$L(f_a) = e^{-as}L(f).$$

Transformée de Laplace des dérivées

Proposition 3 : Soient $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction et $f \in C_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$. Alors

$$L(f^n) = s^{(n)}L(f) - \sum_{k=1}^n s^{k-1}f^{(n-k)}(0).$$

En particulier

$$\begin{aligned} L(f') &= sL(f) - f(0), \\ L(f'') &= s^2L(f) - sf(0) - f'(0), \\ L(f''') &= s^3L(f) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0). \end{aligned}$$

Transformée du produit de convolution

Définition 3 : Le produit de convolution de deux fonctions réelles ou complexes f et g , est une autre fonction, qui se note généralement $f * g$ et qui est définie par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Proposition 4 : Transformée de Laplace de la convolution de deux fonctions

$$L(f * g) = L(f) * L(g).$$

Transformée de Laplace d'une primitive

Proposition 5 : Soit $G(t) = \int_0^t f(x)dx$ la primitive de f qui s'annule en 0, alors

$$L(G) = \frac{L(f)(s)}{s}.$$

Transformée inverse de Laplace et propriétés

Définition 4 : Si $F(s)$ représente la transformée de Laplace d'une fonction f , i.e. $Lf(t) = F(s)$ alors $f(t)$ est la transformée de Laplace inverse de $F(s)$ et nous notons $f(t) = L^{-1}(F)(t)$.

La transformée inverse de Laplace est donnée par

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds.$$

Proposition 6 : Linéarité de la transformée inverse de Laplace

$$L^{-1}(aF + bG)(t) = aL^{-1}(F)(t) + bL^{-1}(G)(t).$$

-Transformée inverse de Laplace d'une translation

L'originale de $L(f)(s - a)$ est

$$L^{-1}[L(f)(s - a)](t) = e^{at} f(t).$$

-Transformée inverse de Laplace d'une dérivée

$$L^{-1}[(L(f))^{(n)}](t) = (-1)^n t^n f(t).$$

Bibliographie

- [1] Abbaoui, K., Cherruault, Y., *New Ideas for Proving Convergence of Decomposition Methods*. Computers Math. Applic., 29(7)(1995) 103–108.
- [2] Abbaoui K., Pujol M.J., Cherruault Y., Himoun N., Grimalt P., *A New Formulation of Adomian Method : Convergence Result*. Kybernetes, 30(9)(2001) 1183–1191.
- [3] Abbasbandy, S., *A new application of He's variational iteration method for quadratic Riccati differential equation by using Adomian's polynomials*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 207(1)2007 59–63.
- [4] Abbasbandy, S., *Numerical solution of non-linear Klein-Gordon equations by variational iteration method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 70(7)(2007) 876–881.
- [5] Abdou, M. A., Soliman, A. A., *variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equation*. J. Comput. Appl. Math., 181(2005) 245–251.
- [6] Adomian, G., *Solving Frontier Problems of Physics : The Decomposition Method*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1994.
- [7] Adomian, G., Rach, R., *Modified decomposition solution of linear and nonlinear boundary-value problems*. Nonlinear Anal, 23(1994) 615–619.
- [8] AL-Jawary, M. A., *An efficient iterative method for solving the Fokker-Planck equation*. Results in Physics, 6(2016) 985–991.
- [9] Al-Saif, A. S. J., *Analytical approximate solutions for two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations*. Advances in Physics Theories and Applications, ISSN 2224-719X (Paper) ISSN 2225-0638 (Online) 49(2015).

- [10] Aminikhah, H., *The combined Laplace transform and new homotopy perturbation methods for stiff systems of ODEs*. Applied Mathematical Modelling, 36(8)(2012) 3638–3644.
- [11] Arafa, A. A. M., Rida, S. Z., Mohamed, H., *Homotopy analysis method for solving biological population model*. Commun. Theor. Phys., 56(2011) 797–800.
- [12] Ayati, Z., Biazar, J., Ebrahimi, S., *A New homotopy perturbation method for solving two-dimensional reaction-diffusion Brusselator system*. Journal of mathematics and computer Science, 15(2015) 195–203.
- [13] Ayati, Z., Biazar, J., *On the convergence of homotopy perturbation method*. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 23(2015) 424–428.
- [14] Bear, J., *Dynamics of fluids in porous media*. Elsevier. New York, (1972).
- [15] Biazar, J., Ghazvini, H., *Homotopy perturbation method for solving hyperbolic partial differential equations*. Computers and Mathematics with Applications, 56(2008) 453–458.
- [16] Biazar, J., Aminikhah, H., *Study of convergence of homotopy perturbation method for systems of partial differential equations*. Computers and Mathematics with Applications, 58(2009) 2221–2230.
- [17] Biazar, J., Ghazvini, H., *Convergence of the homotopy perturbation method for partial differential equations*. Nonlinear Analysis : Real World Applications, 10(5)(2009) 2633–2640.
- [18] Biazar, J., Aminikhah, H., *Exact and numerical solutions for non-linear Burger's equation by VIM*. Mathematical and Computer Modelling, 49(2009) 1394–1400.
- [19] Brajesh, K. S., Pramod, K., *FRDTM for numerical simulation of multi-dimensional, time-fractional model of Navier–Stokes equation*. Ain Shams Engineering Journal, [https://doi.org/10.1016/j.asej.\(2016\).04.009](https://doi.org/10.1016/j.asej.(2016).04.009).
- [20] Cherruault, Y., Adomian, G., *Decomposition methods : A new Proof of Convergence*. Math. Comput. Modelling, 18(1993) 103–106.
- [21] Cherruault Y., *Convergence of Adomian's Method*. Kybernetes, 18(2)(1989) 31–39.

- [22] Chowdhury, M. S. H., Hashim, I., *Application of homotopy-perturbation method to Klein–Gordon and sine-Gordon equations*. *Chaos, Solitons and Fractals*, 39(2009) 1928–1935.
- [23] Dehghan, M., Shakeri, F., *Application of He’s variational iteration method for solving the Cauchy reaction-diffusion problem*. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, doi :10.1016/j.cam.2007.03.006.
- [24] Dehghan, M. , Tatari, M., *The use of He’s variational iteration method for solving the Fokker–Planck equation*. *Phys. Scripta*, 74(2006) 310–316.
- [25] Devendra, K., Jagdev, S. , Sunil, K., *A Fractional Model of Navier-Stokes Equation Arising in Unsteady Flow of a Viscous Fluid*. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and applied Sciences*, 17 (2015) 14–19.
- [26] Dinkar, S., Prince, S., Shubha, C., *Homotopy Perturbation Transform Method with He’s Polynomial for Solution of Coupled Nonlinear Partial Differential Equations*. *Nonlinear Engineering*, 5(1)(2016) 17–23.
- [27] Ezzati, R., Shakibi, K., *Using adomian’s decomposition and multi-quadric quasi-interpolation methods for solving Newell–Whitehead equation*. *Procedia Computer Science*, 3 (2011) 1043–1048.
- [28] Ghorbani, A. , Nadjafi, J. S., *He’s homotopy Perturbation method for calculating adomian polynomials*. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 8(2)(2007) 229–232.
- [29] Ghorbani, A., *Beyond Adomians polynomials : He polynomials*. *Chaos Solitons Fractals*, 39(3)(2009) 1486–1492.
- [30] Gupta, V. G., Gupta, S., *Homotopy Perturbation Transform Method for Solving Initial Boundary Value Problems of Variable Coefficients*. *International Journal of Nonlinear Science*, 12(3)(2011) 270-277.
- [31] Gurtin, M. E., Maccamy, R. C., *On the diffusion of biological population*. *Mathematical Biosciences*, 33(1977) 35–49.
- [32] He, J. H., *Variational iteration method–A kind of non-linear analytical technique : Some examples*. *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 34(1999) 699–708.
- [33] He, J. H., *Homotopy perturbation technique*. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 178(1999) 257–262.

- [34] He, J. H., *The homotopy perturbation method for nonlinear oscillations with discontinuities*. Appl. Math. Comput, 151(2004) 287–292.
- [35] He, J. H., *Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems*. Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 6(2005) 207–208.
- [36] He, J. H., *Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations*. Chaos, Solitons and Fractals, 26(2005) 695–700.
- [37] He, J.H., *Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations*. Internat. J. Modern Phys. B, 20(10)(2006) 1141–1199.
- [38] He, J. H., Lee, E .W. M., *New analytical methods for cleaning up the solution of nonlinear equations*. Computers et Mathematics with Applications, In Press, Available online 8 April (2009).
- [39] Inokuti, M., Sekine, H., & Mura, T., *General use of the Lagrange multiplier in non linear mathematical physics, in Variational Method in the Mechanics of Solids*. S. Nemat-Naseer, Ed,(1978) 156–162, Pergamon Press, New York, USA.
- [40] Khan, Y. and Wu, Q., *Homotopy perturbation transform method for nonlinear equations using He's polynomials*. Computer and Mathematics with Applications, 61(8)(2011) 1963–1967.
- [41] Khan, Y., Usman, M., *Modified homotopy perturbation transform method : A paradigm for nonlinear boundary layer problems*. International Journal of Non-linear Sciences and Numerical Simulation, 15(2013) 19–25.
- [42] Kumar, D., Singh, J., Kumar, S., *A Reliable treatment of biological population model by using Laplace transform*. International Journal of Modern Mathematical Sciences, 7(2)(2013) 132–142.
- [43] Kumar, S., Kumar, D., Abbasbandy, S., Rashidi, M. M., *Analytical Solution of Fractional Navier-Stokes Equation by using Modified Laplace Decomposition Method*. Ain Shams Engineering Journal, 5(2)(2014) 569-574.
- [44] Lesnic, D., *The decomposition method for Cauchy reaction-diffusion problems*. Applied Mathematics Letters, 20 (2007) 412–418.
- [45] Manaa, S. A., *An Approximate solution to the Newell-Whitehead-Segel equation by the Adomian decomposition method*. Raf. J. Comp. Math, 8(1)(2011) 171–180.

- [46] Matinfar, M., Mahdavi, M., Raeisi, Z., *The variational homotopy perturbation method for analytic treatment for linear and non linear ordinary differential equations*. Math. Informatics, 28(3-4) (2010) 845–862.
- [47] Matinfar, M., Mahdavi, M., *Approximate analytical solutions for the time-dependent Emden-Fowler-type equations by variational homotopy perturbation method*. Journal of Modelling and Simulation, 8(1)(2012) 58–65.
- [48] Mohyud-Din, S. T. , *Variational Iteration techniques for solving boundary value problems*, Department of Mathematics comsats Institute of Information Technology Islamabad, Pakistan January (2009).
- [49] Mohyud-Din. S. T., Yildirim. A., *Variational iteration method for delay differential equations using He's polynomials*. Zeitschrift fur Naturforschung. Section A, 65(12)(2010) 1045–1048.
- [50] Momani, S., Odibat, Z., *Analytical solution of a time-fractional Navier–Stokes equation by Adomian decomposition method*. Applied Mathematics and Computation, 177(2)(2006) 488–494.
- [51] Momani S., *A Decomposition Method for Solving Unsteady Convection-Diffusion Problems*. Turk J Math, 32(2008) 51–60.
- [52] Nino, U. F., Leal, H. V., Khan, Y., Sesma, A. P., Sanchez, A. D., Fernandez, Y. M. J., May, A. H., Diaz, D. P., Perez, J. M. M. , Orea, J. S., *Laplace transform homotopy perturbation method as a powerful tool to solve nonlinear problems with boundary conditions defined on finite intervals*. Computational and Applied Mathematics, 34 (2015) 1-16.
- [53] Nourazar, S. S., Soori, M., Nazari, G. A., *On the exact solution of Newell-Whitehead-Segel equation using the homotopy perturbation method*. Journal of Applied Sciences Research, 5(8)(2011) 1400–1411.
- [54] Noor, M. A., Mohyud-Din, S. T., *Homotopy perturbation method for solving nonlinear higherorder boundary value problems*. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 9(4)(2008) 395–408.
- [55] Noor, M. A., Mohyud-Din, S. T., *Variational iteration method for solving higher-order nonlinear boundary value problems using He's polynomials*. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 9(2)(2008)141–157.

Bibliographie

- [56] Noor, M. A., Mohyud-Din, S. T., *Modified variational iteration method for heat and wave-like equations*. Acta Applicandae Mathematicae, 104(3)(2008) 257–269.
- [57] Noor, M. A., Mohyud-Din, S. T., *Variational homotopy perturbation method for solving higher dimensional initial boundary value problems*. Mathematical Problems in Engineering, vol. 2008, Article ID 696734, 11 pages, 2008.
- [58] Odibat, Z. M., *A study on the convergence of variational iteration method*. Mathematical and Computer Modelling, 51(2010) 1181–1192.
- [59] Okubo, A., *Diffusion and ecological problem, mathematical models*. Biomathematics 10, Springer, Berlin. (1980).
- [60] Patade, J., Bhalekar, S., *Approximate analytical solutions of Newell-Whitehead-Segel equation using a new iterative method*. World Journal of Modelling and Simulation, 11(2)(2015) 94–103.
- [61] Prakash, A., Kumar, M., *He's Variational Iteration Method for the Solution of Nonlinear Newell-Whitehead-Segel Equation*. Journal of Applied Analysis and Computation, 6(3) (2016) 738–748.
- [62] Pue-on, P., *Laplace Adomian Decomposition Method for Solving Newell-Whitehead-Segel Equation*. Applied Mathematical Sciences, 7(132)(2013) 6593–6600.
- [63] Rafei, M., Ganji, D. D., *Explicit solutions of Helmholtz equation and fifth-order KdV equation using homotopy perturbation method*. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 7(3)(2006) 321–328.
- [64] Ragab, A. A., Hemida, K. M., Mohamed, M. S., Abd El Salam, M. A., *Solution of Time-Fractional Navier-Stokes Equation by Using Homotopy Analysis Method*. Gen. Math. Notes, 13(2)(2012) 13-21.
- [65] Roul, P., *Application of homotopy perturbation method to biological population model*. Applications and Mathematics : An International Journal(AAM), 10(05)(2010) 1369–1378. <http://pvamu.edu/aam>.
- [66] Saravanan, A., Magesh, N., *A comparison between the reduced differential transform method and the Adomian decomposition method for the Newell-Whitehead-Segel equation*. Egyptian Math. Soc, 21(2013) 259–265.

- [67] Shakeri, F., Dehghan, M., *Numerical solution of a biological population model using He's variational iteration method*. Computers and Mathematics with Applications, 54(2007) 1197–1209.
- [68] Siddiqi, S. S., Muzammal, I., *Variational iteration method for the solution of seventh order boundary value problems using He's polynomials*. Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences, 18(2015) 60–65.
- [69] Singh, B. K., Kumar, P., *FRDTM for numerical simulation of multi-dimensional, time-fractional model of Navier-Stokes equation*. Ain Shams Engineering Journal, (2016) 2090–4479.
- [70] Singh, J., Kumar, D., *Numerical solution of time- and space-fractional coupled Burgers equations via homotopy algorithm*. Alexandria Engineering Journal, 55(2016) 1753–1763.
- [71] Singh, J., Kumar, D., Rathore, S., *Application of Homotopy Perturbation Transform Method for Solving Linear and Nonlinear Klein-Gordon Equations*. Journal of Information and Computing Science, 7(2)(2012) 131–135.
- [72] Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. second ed., in : Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), vol. 258, Springer, New York, 1994.
- [73] Sweilam, N. H., Khader, M. M., *Exact solutions of some coupled nonlinear partial differential equations using the homotopy perturbation method*. Computers and Mathematics with Applications, 58(2009) 2134–2141.
- [74] Tabatabaei, K., Celik, E., Tabatabaei, R., *The differential transform method for solving heat-like and wave-like equations with variable coefficients*. Turk J Phys, 36(2012) 87–98.
- [75] Tatari, M., Dehghan, M., *Numerical solution of Laplace equation in a disk using the Adomian decomposition method*. Phys. Scripta, 72(5)(2005) 345–348.
- [76] Tatari, M., Dehghan, M., *On the convergence of He's variational iteration method*. J. Comput. Appl. Math., 207(2007) 121–128.
- [77] Thamareerat, N., Luadsong, A., and Aschariy, A. N., *The meshless local Petrov–Galerkin method based on moving Kriging interpolation for solving the time fractional Navier–Stokes equations*. Springer Plus, 5 :417 DOI 10.1186/s40064-016-2047-2.(2016).

- [78] Wahab, H. A., Anwar, J., Saira, B., Muhammad, N., Muhammad, S., Sajjad, H., *Application of homotopy perturbation method to the Navier-Stokes equations in cylindrical coordinates*. Computational Ecology and Software, 5(2)(2015) 139–151.
- [79] Wazwaz, A. M., *The decomposition method applied to systems of partial differential equations and to the reaction–diffusion Brusselator model*. Applied Mathematics and Computation, 110(2000) 251–264.
- [80] Wazwaz, A. M., *Construction of solitary wave solutions and rational solutions for the KdV equation by Adomian decomposition method*. Chaos, Solitons and Fractals, 12(2001) 2283–2293.
- [81] Wazwaz, A. M., *An analytical study on the third-order dispersive partial differential equation*. Appl. Math. Comput., 142(2003) 511–520.
- [82] Wazwaz, A. M., *The variational iteration method for solving linear and nonlinear systems of PDEs*. Computers and Mathematics with Applications, 54(2007) 895–902.
- [83] Wazwaz, A. M., *The variational iteration method : A powerful scheme for handling linear and nonlinear diffusion equations*. Computers and Mathematics with Applications, 54(2007) 933–939.
- [84] Wazwaz, A. M., *The variational iteration method for rational solutions for KdV, K(2,2), Burgers, and cubic Boussinesq equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 207(2007) 18–23.
- [85] Wazwaz, A. M., *The variational iteration method for analytic treatment for linear and nonlinear ODEs*. Applied Mathematics and Computation, 212(2009) 120–134.
- [86] Yildirim, A., *Application of He’s homotopy perturbation method for solving the Cauchy reaction-diffusion problem*. Computers and Mathematics with Applications, 57(2009) 612–618.
- [87] Yulita. M., Noorani, I. H., *Variational iteration method for fractional heat- and wave-like equations*. School of Mathematical Sciences, Universiti Kebangsaan Malaysia, 10(2009) 1854–1869.
- [88] Yusufoglu, E., *Homotopy perturbation method for solving a nonlinear system of second order boundary value problems*. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 8(3)(2007) 353–358.

Bibliographie

- [89] Yusufoglu, E., *The variational iteration method for studying the Klein-Gordon equation*. Applied Mathematics Letters, 21(2008) 669–674.
- [90] Zellal, M., Belghaba, K., *Applications of Homotopy Perturbation Transform Method for Solving Newell-Whitehead-Segel Equation*. General Letters in Mathematics, 3(1)(2017) 35–46.
- [91] Zellal, M., Belghaba, K., *An accurate algorithm for solving biological population model by the variational iteration method using He's polynomials*. Arab Journal of Basic and Applied Sciences, 25(3)(2018) 142–149.

Résumé

Ces dernières années, les méthodes (VIM), (HPM), (HPTM) et (VIMHP), ont reçu une attention considérable, comme étant des méthodes modernes et efficaces pour résoudre différents modèles d'équations différentielles linéaires et non linéaires. Pour cette raison, cette thèse a principalement pour objet d'étudier les applications des méthodes (VIM), (HPM), (HPTM) et (VIMHP), dans le domaine des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles telles les équations de Burgers, de la chaleur, des ondes, du problème de diffusion de la réaction de Cauchy, de Klein-Gordon, de Newell-Whitehead-Segel puis celles de Navier-Stokes pour terminer finalement avec le modèle de population biologique.

MOTS CLES :

Méthode d'itération variationnelle; Méthode de perturbation Homotopique; Polynômes de He; Transformation de Laplace; Equation de Newell-Whitehead-Segel; Equation de Navier-Stokes; Equation de population Biologique; Equations de Burgers; Solution exacte; Solution approximative.